

文章编号:1674-8190(2015)03-297-09

最大熵准则识别材料疲劳寿命分布

王宇,李洪双

(南京航空航天大学 航空宇航学院,南京 210016)

摘要: 疲劳寿命具有很大的分散性,是工程结构设计中必须考虑的因素。为了降低主观不确定性的引入,得到更合理的疲劳寿命分布类型,提出一种用于识别疲劳寿命概率分布类型的一般计算方法。该方法首先根据疲劳试验样本信息确定疲劳寿命的前四阶统计矩;基于统计矩信息,利用最大熵准则确定疲劳寿命的概率分布类型。在基于最大熵准则识别疲劳寿命分布时,利用 Lagrange 乘子法求解最大熵分布。采用已有的航空铝合金 2024-T351 板件疲劳裂纹扩展试验数据验证所提计算方法的合理性和有效性。结果表明:所提方法能够高效地识别材料疲劳寿命分布类型,并且不局限于单峰标准分布类型。

关键词: 最大熵准则;疲劳寿命;统计矩;概率方法

中图分类号: TB114.3; O346.2

文献标识码: A

Maximum Entropy Principle for Identifying the Fatigue Life Distribution of Material

Wang Yu, Li Hongshuang

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: It is well-known that the fatigue lives of metal material have a considerable amount of scatter and they are commonly suggested to be considered in engineering design. A rational computational method is proposed for identifying the probability distribution of fatigue life, in order to reduce the introduction of subjective uncertainties and obtain rational probability distribution. Firstly the sample statistics are used to estimate the first four statistical moments of fatigue life. Then, based on all those statistical moment constraints, the maximum entropy principle is employed to identify a rational probability distribution for fatigue life of interest. Identification of fatigue life distribution based on maximum entropy principle, maximum entropy distribution is found by the Lagrange multipliers. The rationality and effectiveness of the proposed method are demonstrated by the experimental data of 2024-T351 aluminum alloy specimens available in the literature. Computational results show that the proposed method can efficiently identify the fatigue life distribution of material and it is not limited in the realm of standard, unimodal distribution types.

Key words: maximum entropy principle; fatigue life; statistical moments; probabilistic method

0 引言

在工程结构设计中,通常认为金属材料的力学

性能是各向同性的,然而即使在相同载荷条件下,疲劳寿命试验数据仍具有相当大的分散性,这归因于不均匀的材料属性、边界条件等因素。因此,概率方法在疲劳寿命预测和抗疲劳设计中的应用得到了重视,包括裂纹萌生寿命和裂纹扩展寿命。随着抗疲劳设计思想的发展和成熟,研究人员提出了许多概率方法用于评估疲劳寿命的不确定性^[1]。许多疲劳试验结果均表明裂纹萌生寿命和疲劳裂纹扩展寿命具有分散性。其中最著名的试验数据

收稿日期:2014-12-08; 修回日期:2015-01-17

基金项目:国家自然科学基金(11102084)

江苏高校优势学科建设工程资助项目

通信作者:李洪双, hongshuangli@nuaa.edu.cn

集是 D. A. Virkler 等^[2]所做的疲劳裂纹扩展试验数据。其他被频繁提及的试验数据还包括: H. Ghonem 等^[3]的试验数据, J. N. Yang 等^[4]的试验数据, 以及 W. F. Wu 等^[5]的疲劳裂纹扩展数据。H. Itagaki 等^[6]也公布了一些具有统计意义的疲劳裂纹扩展数据, 但是很少被提及。从结构设计角度来看, 更重视给定应力水平或者裂纹长度下的疲劳寿命分布, 因为它们是构建工程疲劳可靠性设计所用 $P-S-N$ 或者 $P-a-N$ 曲线的基础, 为疲劳寿命选择合适的分布类型十分重要。在大量的研究中, 通常假设疲劳寿命服从对数正态分布或者威布尔分布, 而上述假设都是基于直觉或者使用经验的, 有时还考虑了数学运算的简单性。疲劳寿命预测、分析的精度和可信赖性依赖于这些假设分布类型是否能真实地反映材料疲劳寿命的不确定性。在研究材料的疲劳现象时, 最可信的数据源仍然是疲劳试验数据。从试验数据中最大化地挖掘疲劳寿命的分散信息, 同时降低人为引入分布类型所带来的主观不确定性, 是确定疲劳寿命分布类型的关键。基于此, Yi Gong 等^[7]提出采用最大熵准则确定材料疲劳寿命分布类型, 仅使用前两阶统计矩, 得出解析的疲劳寿命分布类型为截断正态分布。然而该结论使用并不广泛, 主要原因是仅使用了前两阶统计矩, 理论上只能解析得到正态分布或者截断正态分布(截断正态分布考虑了疲劳寿命分布的非负性), 未能充分发挥最大熵准则在识别概率分布类型时的灵活性及最优无偏估计特性。

本文基于最大熵准则, 充分利用其灵活性和最优无偏估计特性, 提出新的材料疲劳寿命分布识别方法。该方法应用样本统计量确定疲劳寿命的前四阶统计矩, 将统计矩信息作为最大熵准则的约束条件, 然后利用最大熵准则确定其概率分布。最后利用已有的航空铝合金板件 2024-T351 疲劳裂纹扩展的试验数据验证所提计算方法的合理性。

1 疲劳寿命统计矩计算

对于疲劳寿命分布, 实验室通常可以得到给定应力水平或者裂纹长度条件下的载荷循环次数。载荷循环次数样本中含有疲劳寿命总体信息, 但较为分散, 一般不宜直接用于统计推断。通常是把样本中的信息加工处理, 用样本统计量^[8]的形式集中起来, 然后基于统计量作各种统计推断。

本文所提方法需先用试验数据样本得到疲劳寿命的统计矩。设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自实验室的疲劳寿命样本, 基于该试验数据样本的样本中心矩的计算公式为

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (2)$$

$$ske = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3 / s^3 \quad (3)$$

$$kur = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4 / s^4 - 3 \quad (4)$$

式中: μ 、 s 、 ske 和 kur 分别为样本的均值、标准差、偏度和峰度。

2 最大熵准则识别疲劳寿命分布

2.1 最大熵准则

在概率论中, 信息熵是衡量事件的不确定大小的量^[9]。连续型随机变量 X 的信息熵定义为

$$H_x = - \int f(x) \log f(x) dx \quad (5)$$

式中: $f(x)$ 为 X 的概率密度函数。

最大熵准则表明在满足给定约束信息(例如统计矩信息)的条件下, 使式(5)数值最大的概率分布为最佳无偏估计分布。最大熵准则具有唯一性、不变性、系统独立性和独立子集等性质。即对于给定统计矩约束的概率分布识别问题, 利用最大熵准则确定的分布类型是唯一的, 也是满足统计矩信息的最优分布。根据 E. T. Jaynes 的研究^[9-10], 已知随机变量的前 N 阶原点矩为

$$\mu_i = \int x^i f(x) dx \quad (i=1, \dots, N) \quad (6)$$

并且概率密度函数的归一化表达形式为

$$\int f(x) dx = 1 \quad (7)$$

在满足式(6)~式(7)的约束条件下, 基于最大熵准则的概率分布识别问题可以写成如下的优化问题形式:

$$\max H_x \quad (8)$$

$$\text{s. t.} \quad \int f(x) dx = 1$$

$$\int x^i f(x) dx = \mu_i \quad (i=1, \dots, N)$$

在利用 Lagrange 乘子法求解式(8)的优化问

题时,得到最大熵分布

$$f(x) = \exp(-\lambda_0) \exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i x^i\right) \quad (9)$$

式中: $\lambda_i (i=0, \dots, N)$ 为 Lagrange 乘子。

将式(9)代入式(7),可得标准化因子 λ_0 为

$$\lambda_0 = \ln \left[\exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i x^i\right) dx \right] \quad (10)$$

最大熵准则不仅适用于统计矩信息,还可以推广至一般条件下任意函数的期望值。

2.2 计算 Lagrange 乘子

式(9)属于泊松分布族,对于 $N \leq 2$,基于有效矩信息对应 $\lambda_i (i=0, \dots, N)$ 的显式解是有可能获得的。例如, $N=2$ 时,对应正态分布。根据不同的矩约束条件,S. Y. Park 等^[11]给出了多达 16 种概率分布类型的解析最大熵分布表达式。当 $N \geq 3$ 时,最大熵分布没有显式解析解(非标准分布类型),需要采用数值算法求解 Lagrange 乘子。一般的,Lagrange 乘子可以利用标准牛顿方法^[12]求解 N 个非线性等式来获得。将式(9)~式(10)代入式(6)便很容易推导。对比求解 N 个非线性等式的方法,提出采用无约束最小化方法^[12-14],该方法较传统方法效率更高、数值更稳定,下文简要描述其推导过程。

将式(9)代入式(7),得到

$$\exp(\lambda_0) = \int \exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i x^i\right) dx \quad (11)$$

为了计算方便,将式(11)定义为一个关于 $\lambda_i (i=1, \dots, N)$ 的函数:

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \equiv \exp(\lambda_0) = \int \exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i x^i\right) dx \quad (12)$$

因此,式(9)的概率密度函数 $f(x)$ 可以改写为

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i x^i\right)}{P(\lambda_1, \dots, \lambda_N)} \quad (13)$$

在式(12)中增加一些项,从而转换为

$$\begin{aligned} P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= \int \exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i x^i\right) dx \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \mu_i\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i \mu_i\right) \int \exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i x^i\right) dx \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i \mu_i\right) \int \exp\left[-\sum_{i=1}^N \lambda_i (x^i - \mu_i)\right] dx \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)的积分项定义为关于 $\lambda_i (i=1, \dots, N)$ 的一个势函数:

$$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \equiv \int \exp\left[-\sum_{i=1}^N \lambda_i (x^i - \mu_i)\right] dx \quad (15)$$

则式(12)~式(13)可以改写为

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i \mu_i\right) \quad (16)$$

$$f(x) = [Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N)]^{-1} \exp\left[-\sum_{i=1}^N \lambda_i (x^i - \mu_i)\right] \quad (17)$$

根据 $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 的定义,计算 $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 对 $\lambda_i (i=1, \dots, N)$ 的偏导数,有

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \lambda_i} &= \int \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \exp\left[-\sum_{i=1}^N \lambda_i (x^i - \mu_i)\right] dx \\ &= \int -(x^i - \mu_i) \exp\left[-\sum_{i=1}^N \lambda_i (x^i - \mu_i)\right] dx \\ &= Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N) [Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N)]^{-1} \cdot \\ &\quad \int -(x^i - \mu_i) \cdot \exp\left[-\sum_{i=1}^N \lambda_i (x^i - \mu_i)\right] dx \\ &= Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \int -(x^i - \mu_i) f(x) dx \end{aligned} \quad (18)$$

由式(6)可知:

$$\begin{aligned} \int (x^i - \mu_i) f(x) dx &= \int x^i f(x) dx - \int \mu_i f(x) dx \\ &= \int x^i f(x) dx - \mu_i = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

因此 $\partial Q / \partial \lambda_i = 0 (i=1, \dots, N)$,即点 $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 至少是势函数 $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 的一个鞍点。

计算 Hessian 矩阵中的元素:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \int (x^i - \mu_i)(x^j - \mu_j) f(x) dx \quad (20)$$

式(20)表明 $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 的 Hessian 矩阵是类协方差矩阵,这是因为 $x^i (i=1, \dots, N)$ 是线性无关的。只要 $f(x)$ 是概率密度函数,则类协方差 Hessian 矩阵一定是正定和满秩矩阵。当 $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 取得极小值时,其参数有唯一解。N. Agmon 等^[15]已证明求解 N 个非线性等式问题与求势函数 $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 的极小值是等价的。即 $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 的全局极小值一定满足统计矩约束,是使式(5)信息熵取得最大值时的最大熵分布解集。由于势函数 $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 无约束条件,其求解过程可用 Nelder-Mead 算法实现。

2.3 疲劳寿命分布的识别

为了确定疲劳寿命的最大熵分布,首先计算疲劳寿命试验数据的前四阶统计矩,将统计矩标准化更容易实现该算法^[14]。

前二阶统计矩约束改写为

$$\begin{cases} \mu_{\bar{N}_b} = 0 \\ \nu_{\bar{N}_b} = 1 \end{cases} \quad (21)$$

式中: $\bar{N}_b = \frac{N_b - \mu_{N_b}}{\nu_{N_b}}$, 为标准化疲劳寿命随机变量;

偏度和峰度同样可以线性转化确定。

金属材料疲劳寿命的概率分布可由最大熵准则基于疲劳寿命试验数据前四阶统计矩来确定。最大熵准则是在给定约束信息条件下确定概率分布最有效的方式之一。由概率论知识可知,有限统计矩不能唯一确定其概率分布,而根据最大熵准则,在已知约束条件下,所有可能的概率分布中存在一个使信息熵取极大值的分布,该分布包含最少的人为假设信息,即最小化主观不确定性的引入^[9-10],由此可得一种识别疲劳寿命概率分布的工具。一旦确定疲劳寿命的概率密度函数的显式表达式,便可以像已有标准分布(例如对数正态分布、威布尔分布)一样通过简单的编程计算得到累积分布函数和分位数等信息,这些信息可用于疲劳可靠性预测、分析和设计。

3 实例分析

选用 W. F. Wu 等^[5]的疲劳裂纹扩展试验数据,试验系统包括 MTS 疲劳试验机、控制器、LabVIEW 信号产生—数据收集系统以及变焦显微镜(用于裂纹尺寸的测量)。疲劳裂纹试验件为广泛应用于飞机结构的 2024-T351 铝合金板件。试件的宽度和厚度分别为 50 mm 和 12 mm,其化学成分为 Si(0.07)、Fe(0.11)、Cu(4.42)、Mn(0.66)、Cr(0.03)、Ti(0.02)和 Zn(0.05),材料的名义屈服强度为 320 MPa,极限应力为 462 MPa,伸长率为 15.4%。

裂纹预处理将裂纹长度由 15 mm 扩展至 18 mm。最大载荷为 4.5 kN,最小载荷为 0.9 kN,加载频率为 15 Hz,在裂纹预处理和疲劳裂纹扩展试验过程中均采用 LabVIEW 产生的正弦曲线信号。裂纹长度从 18 mm 开始,利用先进的联动系

统准确记录载荷数据、裂纹尺寸和循环数,完成 30 组恒幅疲劳裂纹扩展试验。试验所得裂纹扩展曲线如图 1 所示,可以看出数据具有很大的分散性。

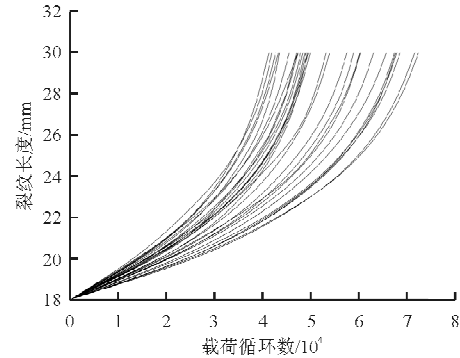


图1 裂纹扩展试验曲线

Fig. 1 Crack propagation curves

特定裂纹长度下载荷循环数的离散数据如表 1 所示。

表1 疲劳载荷循环
Table 1 Fatigue load cycles

试件 编号	载荷循环数						试件 断裂
	裂纹 20 mm	裂纹 22 mm	裂纹 24 mm	裂纹 26 mm	裂纹 28 mm	裂纹 30 mm	
1	26 100	41 267	53 100	59 812	64 727	67 432	69 881
2	21 692	35 889	45 469	52 026	56 613	58 955	61 007
3	14 158	26 160	34 663	40 358	44 167	47 282	48 600
4	15 333	26 768	34 768	39 867	43 309	45 483	47 300
5	16 615	28 011	36 450	42 352	45 956	47 868	49 686
6	17 091	30 341	38 125	43 780	47 150	49 487	51 392
7	16 000	27 096	33 831	39 006	41 907	43 448	43 991
8	25 818	42 111	52 800	60 762	65 700	68 600	71 200
9	13 786	23 309	31 589	36 575	40 056	41 860	43 172
10	27 538	44 059	56 347	63 745	68 533	71 652	74 300
11	21 692	37 308	48 244	55 400	60 350	63 071	65 320
12	15 250	25 686	32 529	37 427	40 677	42 611	44 025
13	19 850	32 091	39 578	44 431	47 522	49 289	50 600
14	16 286	30 053	38 426	43 736	46 880	48 687	50 083
15	25 800	42 154	53 225	60 727	65 089	67 664	70 206
16	16 773	28 804	36 535	41 739	45 120	47 290	49 030
17	17 563	29 933	38 138	43 500	47 064	49 043	51 009
18	17 846	30 514	39 400	47 400	50 893	53 157	55 100
17	20 077	34 550	46 895	52 750	57 683	60 277	62 357
20	26 600	43 813	56 515	64 327	69 273	72 438	75 300
21	18 375	30 500	39 186	43 894	47 614	49 857	51 600
22	24 167	41 182	52 467	60 171	65 080	67 914	70 602
23	19 563	32 771	41 457	47 420	51 446	53 863	55 874
24	23 455	38 929	49 700	57 311	62 622	65 726	68 400
25	18 200	29 354	37 200	42 800	46 300	48 295	50 207
26	14 692	25 488	32 711	37 765	41 025	43 247	44 773
27	20 540	34 900	43 769	50 671	54 909	57 583	60 111
28	21 219	36 563	46 556	53 720	57 794	60 371	61 000
29	16 167	28 591	35 893	41 375	44 870	47 047	48 700
30	15 000	25 564	31 940	36 417	39 182	41 237	44 600

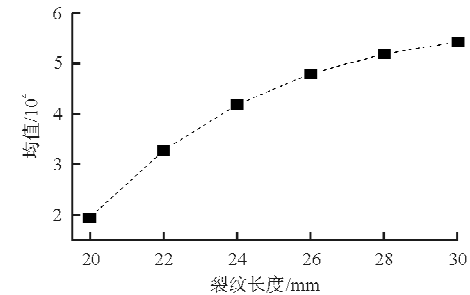
数据样本的统计矩(均值、标准差、变异系数、偏度和峰度)如表 2 所示。

表 2 数据样本的统计矩

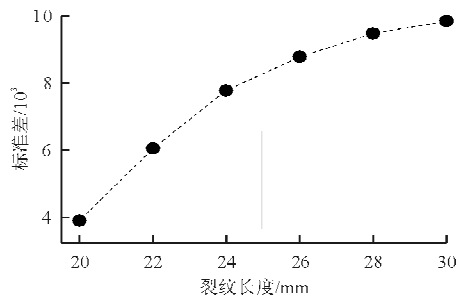
Table 2 Statistical moments of data sample

裂纹尺寸/mm	统计矩				
	均值	标准差	变异系数	偏度	峰度
20	19 441	4 129	0.212	0.532 1	2.064 5
22	32 792	6 198	0.189	0.438 2	1.941 3
24	41 917	7 863	0.188	0.476 3	1.902 3
26	48 042	8 832	0.184	0.454 3	1.859 0
28	51 984	9 503	0.183	0.441 8	1.806 1
30	54 356	9 860	0.181	0.448 9	1.812 4
试件断裂	56 314	10 231	0.182	0.476 4	1.833 7

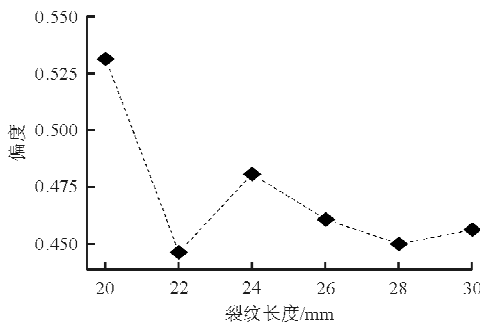
疲劳寿命的均值、标准差、偏度和峰度随裂纹长度的变化趋势如图 2 所示。



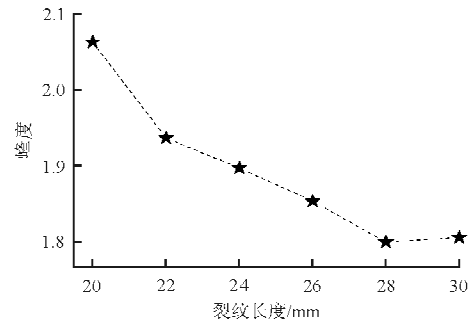
(a) 均值随裂纹长度的变化



(b) 标准差随裂纹长度的变化



(c) 偏度随裂纹长度的变化



(d) 峰度随裂纹长度的变化

图 2 统计矩随裂纹长度的变化趋势

Fig. 2 Changing trend of statistical moments with crack length

根据给定的载荷循环数样本,可由式(1)~式(4)计算其前四阶统计矩,基于统计矩信息,利用最大熵准则能够识别特定裂纹长度条件下疲劳裂纹扩展寿命的概率密度函数。由于概率密度函数表达式类似,本文仅列出裂纹长度为 22 和 28 mm 时,给定不同统计矩阶数由最大熵准则识别出的表达式,用于对比分析。

首先,基于前两阶统计矩,识别疲劳裂纹扩展寿命分布类型。采用最大熵准则识别出的裂纹长度 $a=22$ mm 时,疲劳裂纹扩展寿命的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{15536} \times \exp\{1.3268 \times 10^{-5} \times [(x - 32792)/6198] - 0.5 \times [(x - 32792)/6198]^2\} \quad (22)$$

裂纹长度 $a=28$ mm 时,最大熵准则识别出的疲劳裂纹扩展寿命的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{23820} \times \exp\{1.3268 \times 10^{-5} \times [(x - 51984)/9503] - 0.5 \times [(x - 51984)/9503]^2\} \quad (23)$$

由最大熵理论可知,此时式(22)~式(23)为正态分布的概率密度函数。

然后,基于前三阶统计矩,识别疲劳裂纹扩展寿命分布类型。采用最大熵准则识别出的裂纹长度 $a=22$ mm 时,疲劳裂纹扩展寿命的概率密度函数为

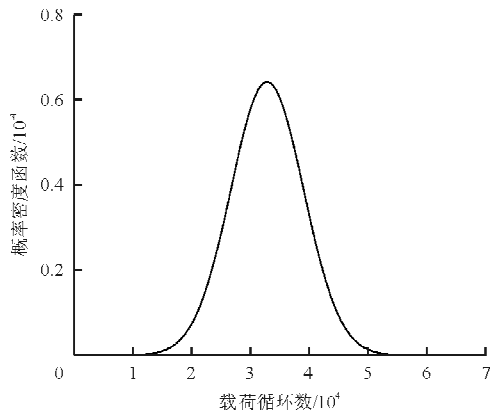
$$f(x) = \frac{1}{15120} \times \exp\{-0.1888 \times [(x - 32792)/6198] - 0.54 \times [(x - 32792)/6198]^2 + 0.0631 \times [(x - 32792)/6198]^3\} \quad (24)$$

裂纹长度 $a=28\text{ mm}$ 时,最大熵准则识别出的疲劳裂纹扩展寿命的概率密度函数为

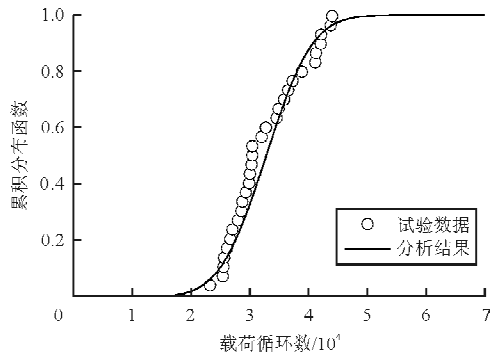
$$f(x) = \frac{1}{23600} \times \exp\{-0.19 \times [(x - 51984)/9503] - 0.5406 \times [(x - 51984)/9503]^2 + 0.0635 \times [(x - 51984)/9503]^3\} \quad (25)$$

此时式(24)~式(25)为非标准分布的概率密度函数。

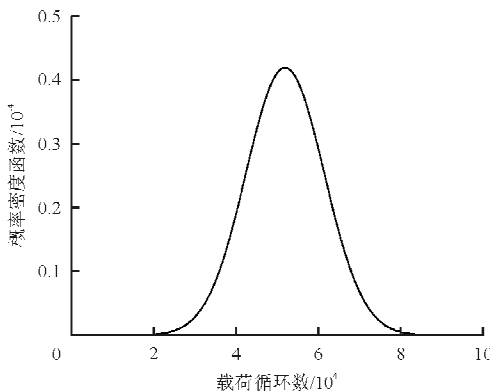
裂纹长度为 22 和 28 mm 时,基于前两阶统计矩的疲劳裂纹扩展寿命的概率密度函数和累积分布函数如图 3 所示。



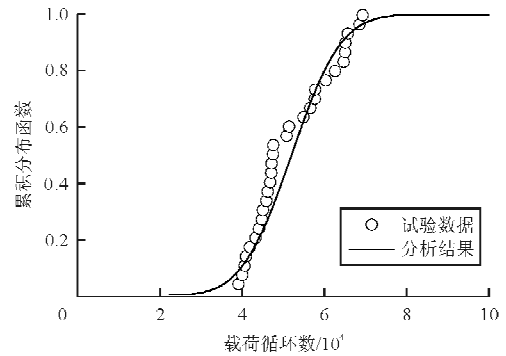
(a) $a=22\text{ mm}$



(b) $a=22\text{ mm}$



(c) $a=28\text{ mm}$

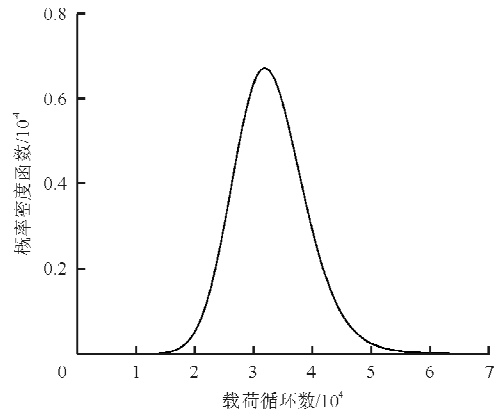


(d) $a=28\text{ mm}$

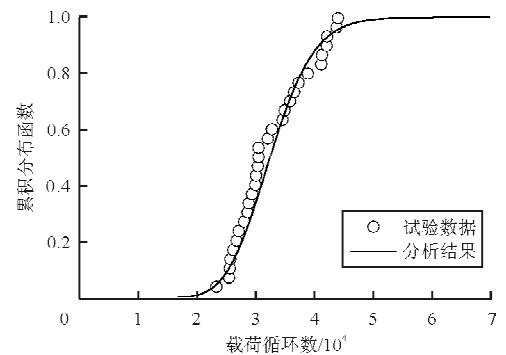
图 3 基于前两阶统计矩的概率密度函数和累积分布函数曲线

Fig. 3 The probability density function curve and cumulative distribution function curve based on the first two statistical moments

裂纹长度为 22 和 28 mm 时,基于前三阶统计矩的疲劳裂纹扩展寿命的概率密度函数和累积分布函数如图 4 所示。



(a) $a=22\text{ mm}$



(b) $a=22\text{ mm}$

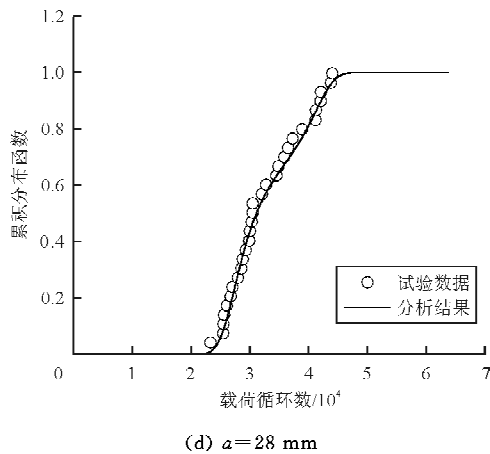
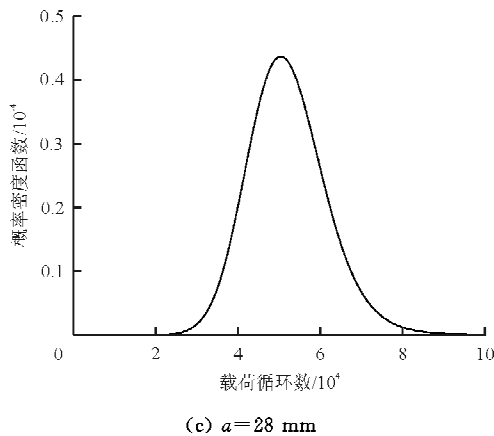


图 4 基于前三阶统计矩的概率密度函数和累积分布函数曲线

Fig.4 The probability density function curve and cumulative distribution function curve based on the first three statistical moments

从图 3~图 4 可以看出:识别出的分布类型为正态分布或者近似正态分布的单峰分布;识别结果与试验数据存在明显差异,尤其是在累积分布函数 $F(x)=0.6$ 附近。

最后,基于前四阶统计矩,识别疲劳裂纹扩展寿命分布类型。采用最大熵准则识别出的裂纹长度 $a=22\text{ mm}$ 时,疲劳裂纹扩展寿命的概率密度函数为

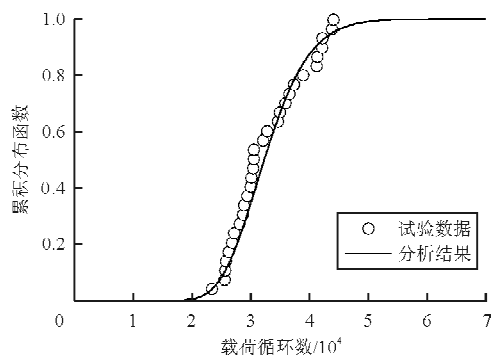
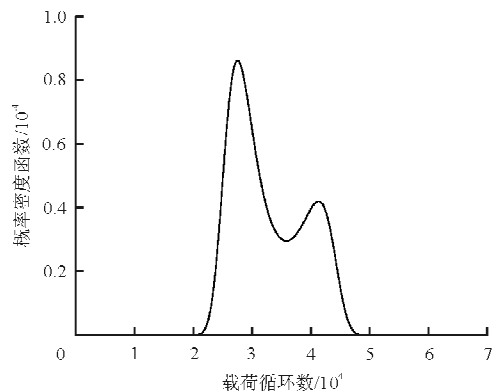
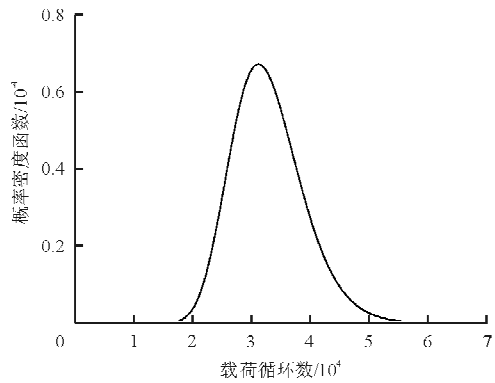
$$f(x) = \frac{1}{26342} \times \exp\{-0.9794 \times [(x - 32792)/6198] + 0.7818 \times [(x - 32792)/6198]^2 + 0.5771 \times [(x - 32792)/6198]^3 - 0.4281 \times [(x - 32792)/6198]^4\} \quad (26)$$

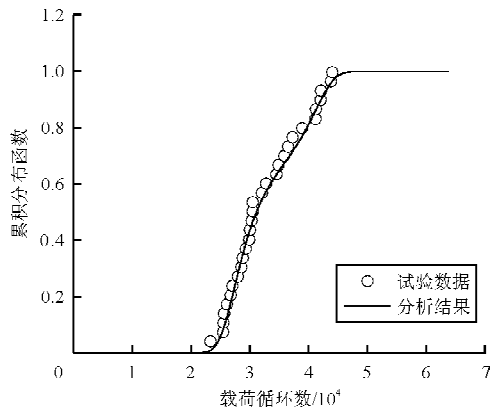
裂纹长度 $a=28\text{ mm}$ 时,最大熵准则识别出的疲劳裂纹扩展寿命的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{48639} \times \exp\{-1.2182 \times [(x - 51984)/9503] + 1.2531 \times [(x - 51984)/9503]^2 + 0.7758 \times [(x - 51984)/9503]^3 - 0.6276 \times [(x - 51984)/9503]^4\} \quad (27)$$

从式(26)~式(27)看出,本文方法识别出的概率分布类型不是常见的标准分布类型。

基于前四阶统计矩的疲劳裂纹扩展寿命的概率密度函数和累积分布函数分别如图 5~图 6 所示。同时,图中还给出了 W. F. Wu 等^[5]利用随机过程理论得出的估计曲线。

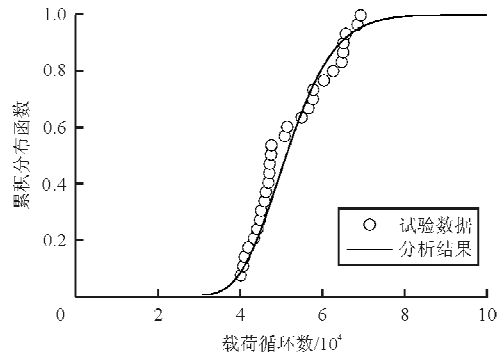




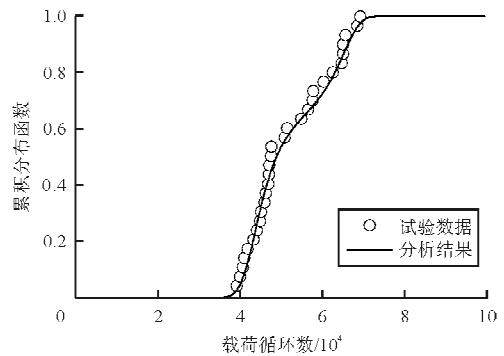
(d) 本文方法所得累积分布函数

图 5 概率密度函数、累积分布函数及文献[5]给出的相应曲线($a=22\text{ mm}$)

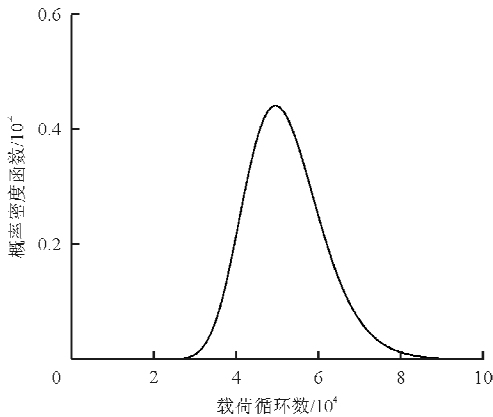
Fig. 5 Probability density function, cumulative distribution function, and the corresponding curves gave by literature[5] ($a=22\text{ mm}$)



(c) 文献[5]给出的累积分布函数估计曲线



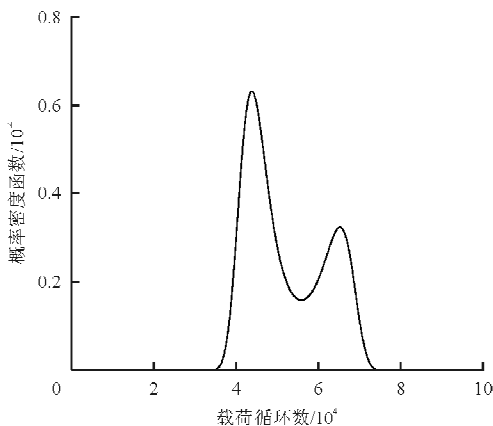
(d) 本文方法所得累积分布函数



(a) 文献[5]给出的概率密度函数估计曲线

图 6 概率密度函数、累积分布函数及文献[5]给出的相应曲线($a=28\text{ mm}$)

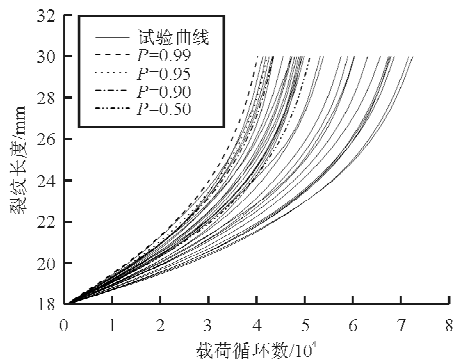
Fig. 6 Probability density function, cumulative distribution function, and the corresponding curves gave by literature[5] ($a=28\text{ mm}$)



(b) 本文方法所得概率密度函数

从图 5~图 6 可以看出:与文献[5]的原试验数据集相比,本文方法可以更加准确地描述该组试验数据。

从图 5~图 6 还可以看出,识别出的疲劳裂纹扩展寿命概率分布是多峰的,并不是常用的单峰标准概率分布类型(例如对数正态分布^[5]或者威布尔分布)。基于该组试验数据集,对数正态分布或者威布尔分布均能通过假设检验,但是与实际情况吻合较差。根据最大熵准则的性质,其确定的最大熵分布是最优分布,人为引入的分散性也最小,这与图 1 中裂纹扩展曲线主要集中在偏左的位置,少量集中在偏右的位置相一致。根据所得的累积分布函数可以得到特定裂纹长度下疲劳裂纹扩展寿命在各个置信水平条件下的置信区间,再利用最小二乘法得到疲劳可靠性设计所需的 $P-a-N$ 曲线。90%,95%,99%条件下的置信下限如图 7 所示。

图7 P - a - N 曲线Fig. 7 P - a - N curves

4 结 论

本文利用样本统计量和最大熵准则提出了一种用于识别疲劳裂纹扩展寿命分布的计算方法。该方法采用样本统计量计算疲劳寿命的前四阶样本统计矩,将统计矩信息作为约束条件,基于最大熵准则识别疲劳寿命分布的概率密度函数和累积分布函数。由于采用了无约束优化形式求解最大熵准则所涉及的 Lagrange 乘子,避免了求解方程组可能出现的数值奇异现象。由该方法确定的最大熵分布是从一簇分布中选出的,不但避免了过多地引入主观不确定性,还能够灵活地描述疲劳寿命的分散性(单峰和双峰分布均可)。该方法的计算过程具有概念简单、计算效率高、容易编程实现、适应范围广和潜在工程应用性强等特点。利用已有的铝合金板材 2024-T351 的疲劳裂纹扩展试验的数据,验证了该方法的合理性和有效性。

参考文献

- [1] Bogdanoff J L, Kozin F. Probabilistic models of cumulative damage[M]. New York: John Wiley & Sons Inc., 2005.
- [2] Virkler D A, Hillberry B M, Goel P K. The statistical nature of fatigue crack propagation[J]. ASME Journal of Engineering Materials and Technology, 1979, 101(2): 148-153.
- [3] Ghonem H, Dore S. Experimental study of the constant probability crack growth curves under constant amplitude loading[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1987, 27(1):

1-25.

- [4] Yang J N, Hsi W H, Manning S D. Stochastic crack propagation with applications to durability and tolerance analyses [R]. AFWAL-TR-85-3062, 1985.
- [5] Wu W F, Ni C C. A study of stochastic fatigue crack growth modeling through experimental data[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2003, 18(2): 107-118.
- [6] Itagaki H, Ishizuka T, Huang P Y. Experimental estimation of the probability distribution of fatigue crack growth lives[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1993, 8(1): 25-34.
- [7] Yi Gong, Norton M P. Materials fatigue life distribution: a maximum entropy approach[J]. Journal of Testing and Evaluation, 1998, 26(1): 53-63.
- [8] 茆诗松, 汤银才, 王玲玲. 现代数学基础 7: 可靠性统计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
Mao Shisong, Tang Yincui, Wang Lingling. Modern mathematics foundation 7: reliability statistics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2008. (in Chinese)
- [9] Jaynes E T. Information theory and statistical mechanics [J]. The Physical Review, 1957, 106(4): 620-630.
- [10] Jaynes E T. Probability theory: the logic of science[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [11] Park S Y, Bera A K. Maximum entropy autoregressive conditional heteroskedasticity model[J]. Journal of Econometrics, 2009, 150(2): 219-230.
- [12] Hurtado J E, Barbat A H. Fourier-based maximum entropy method in stochastic dynamics[J]. Structural Safety, 1998, 20(3): 221-235.
- [13] Pandey M D, Ariaratnam S T. Crossing rate analysis of nongaussian response of linear systems[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1996, 122(6): 507-511.
- [14] Rockinger M, Jondeau E. Entropy densities with an application to autoregressive conditional skewness and kurtosis [J]. Journal of Econometrics, 2002, 106(1): 119-142.
- [15] Agmon N, Alhassid Y, Levine R D. An algorithm for finding the distribution of maximal entropy [J]. Journal of Computational Physics, 1979, 30(2): 250-258.

作者简介:

王宇(1987—),男,硕士研究生。主要研究方向:疲劳可靠性、飞行器可靠性工程。

李洪双(1978—),男,博士,副教授。主要研究方向:飞行器可靠性工程、飞行器结构优化设计。

(编辑:马文静)