

文章编号: 1674-8190(XXXX)XX-001-07

一种改进径向基函数插值法在气动载荷施加中的应用

郑威, 熊俊, 刘剑, 季凯

(中电科芜湖通用航空产业技术研究院有限公司, 芜湖 241000)

摘要: 气动载荷是飞行器结构有限元分析中一类重要的载荷形式, 由于气动载荷的网格一般与结构网格不匹配, 甚至气动载荷是以坐标-压强表格的形式给出的, 需要对其进行三维插值后才能施加到结构网格上。提出一种改进径向基函数插值法, 该方法在径向基函数插值法的基础上, 通过插值点的法向量对插值点的邻近空间进行扭曲, 以减少非共面采样点的干扰, 并通过 K 维树数据结构提高算法效率; 该改进径向基函数插值法可以仅依据坐标-压强表格获得与结构网格匹配的载荷谱, 通过对几种典型飞行器结构算例进行气动载荷的插值, 证明该方法的可行性。结果表明: 改进的径向基函数插值法为气动载荷在飞行器结构有限元分析中的准确施加提供了有效手段, 具有重要的应用价值。

关键词: 径向基函数; 三维插值; 气动载荷; 有限元分析; K 维树

中图分类号: V215

文献标识码: A

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.XXXX.XX.01

A modified radial basis function interpolation method for aerodynamic load application

ZHENG Wei, XIONG Jun, LIU Jian, JI Kai

(CETC Wuhu General Aviation Industry Technology Research Institute Co., Ltd., Wuhu 241000, China)

Abstract: Aerodynamic loads are an important type of load in finite element analysis of aircraft structures. Due to the mismatch between the mesh used in computational fluid dynamics (CFD) and the one in structural analysis, and the load can be given in the form of a coordinate-pressure table, three-dimensional interpolation of the aerodynamic load input is often required before it can be applied to the structural mesh. A modified radial basis function interpolation method is proposed, where neighboring space of the interpolation point is distorted according to its normal vector, thus reducing the interference of non-coplanar sampling points. Additionally, it enhances the algorithm efficiency by incorporating a KD tree data structure. This modified radial basis function interpolation method can obtain a load spectrum matching the structural mesh based only on the coordinate-pressure table. The feasibility of the method is demonstrated through interpolation of aerodynamic loads for several typical aircraft structures. The results show that the modified radial basis function interpolation method provides an effective means for accurately applying aerodynamic loads in the finite element analysis of aircraft structures, and has important application value.

Key words: radial basis function; 3D interpolation; aerodynamic load; finite element analysis; KD tree

收稿日期: 2023-10-25; 修回日期: 2024-02-22

通信作者: 郑威(1989-), 男, 博士, 工程师。E-mail: kantslife@qq.com

引用格式: 郑威, 熊俊, 刘剑, 等. 一种改进径向基函数插值法在气动载荷施加中的应用[J]. 航空工程进展, XXXX, XX(XX): 1-7.

ZHENG Wei, XIONG Jun, LIU Jian, et al. A modified radial basis function interpolation method for aerodynamic load application [J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, XXXX, XX(XX): 1-7. (in Chinese)

0 引言

气动载荷是飞行器结构有限元分析中一类重要的载荷形式,其载荷输入一般由计算流体力学仿真得到,也可能来源于风洞实验或试飞的测量结果。

气动载荷输入存在以下3种可能的形式:1)表面网格—压强场;2)节点坐标—压强;3)节点—力。对于第3种输入形式,雷莉等^[1]描述的三点排^[2]、四点排、多点排等方法均可实现气动载荷到结构网格的重新分配,不再赘述。

表面网格与对应压强场形式的气动载荷输入,一般可由结构有限元软件识别和转换,但由于插值过程是黑箱式的,用户难以根据需要进行干预。

以节点坐标与各节点压强值的形式提供气动载荷输入,由于输入不包含网格,需要手工插值为有限元软件可以识别的形式。

李海涛等^[3]介绍了泰森多边形、反距离权重插值、样条函数插值、克里金插值等通用空间插值方法。泰森多边形法需要在插值空间构造 Delaunay 三角网格,适用于样本点分布均匀的较小区域内空间变异性不明显的场景;反距离权重插值基于观测点对插值点的影响与距离呈反比的基本假设,柳鑫等^[4]使用反距离权重插值法进行空间温度场插值;李力等^[5]基于薄板样条插值函数进行气动分布载荷插值;张建刚等^[6]成功地通过薄板样条插值函数对二维气动力载荷进行分配,但认为薄板样条插值函数对三维气动力载荷分配问题运算量过大;赵佶男^[7]分别用薄板样条插值和克里金插值法对气动导数进行二维插值计算,发现克里金插值法的效果更优。

上述插值方法一般没有针对飞行器结构的特性进行优化,并且存在三维插值计算量大导致插值过程耗时较长的情况。

本文提出一种改进的径向基函数插值法,该方法以径向基函数插值法^[8-11]为基础,考虑气动载荷施加问题中插值点与采样点可能分属不同表面的情况,利用插值点的法向量对采样点坐标进行空间扭曲,减少非共面采样点对插值结果的影响;并采用K维树的数据结构提高插值算法计算效率。

1 数值方法

1.1 反距离权重插值法

反距离权重(Inverse Distance Weight,简称IDW)插值法,基于Tobler地理学第一定律^[12],即空间相关性与距离有关,且两者呈反比。该方法原本用于地理属性的空间插值,但也被广泛应用于其它领域。

IDW插值公式为

$$\bar{P}(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i P_i \quad (1)$$

式中: $x_i (i=1, \dots, n)$ 为第*i*个采样点的空间坐标; P_i 为对应采样点的压强数据; \bar{P} 则为空间任意一点的压强插值结果; ω_i 为第*i*个采样点对插值点的权重。

$$\omega_i = \frac{r_i^{-p}}{\sum_{i=1}^n r_i^{-p}} \quad (2)$$

式中: r_i 为采样点对插值点间欧氏距离; p 为指数幂,一般取1或2,依据插值效果可适当对其加以调整。

1.2 径向基函数插值法

径向基函数(Radial Basis Function,简称RBF)插值法是一类常用的多维数据插值方法,该方法不要求采样点(即输入数据)在空间中具有结构化的网格形式,是一类散点数据插值方法(Scattered Data Interpolation)。

RBF插值法构造采样点的径向基函数,对其进行加权得到插值点的取值,公式具有以下形式:

$$\bar{P}(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i \psi(\|x_i - x_j\|) \\ \bar{P}(x_i) = P_i \quad (3)$$

式中: $\psi(r)$ 即径向基函数,薄板样条(Thin Plate Spline)函数是一种常用的径向基函数,其表达式如下:

$$\psi(r) = r^2 \ln(r) \quad (4)$$

可以看出,该函数与高斯函数(另一种径向基函数)不同,并不是与距离呈反比的,但由于径向基函数插值法中引入了权数 ω_i ,此类与距离呈正比关系的径向基函数,仍能取得良好的插值效果。权数 ω_i 通过下式确定:

$$\begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \cdots & \psi_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n,1} & \cdots & \psi_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中, $\psi_{i,j} = \psi(\|x_i - x_j\|)$ 。

实际上, 1.1 节中提到的反距离权重也可以看作是一种特殊的径向基函数。

1.3 改进径向基函数插值法

改进径向基函数插值法, 主要进行算法效率与提高插值精度两方面改进。

其中算法效率方面通过将采样点坐标存储于 K 维树(KD Tree)数据结构中(K 维树是二叉树的一种特殊形式, 其每个节点存储的都是 K 维空间点, 常用于高维空间中的搜索^[13-14]), 在插值的过程中对待插值点进行地最邻近搜索, 以最邻近的 N 个采样点进行插值计算, 从而提高三维插值的算法效率。由于求解 m 维方程组的时间复杂度为 $O(m^3)$ ^[15], 因此原始的 RBF 插值法的时间复杂度为 $O(l \cdot m^3)$, 其中 l 表示插值点的个数, m 则是采样点的个数; 采用 K 维树并进行邻近搜索 n 个邻近点(搜索过程的时间复杂度中位数值为 $O(m)$ ^[16], 平均值则为 $O(\log(m))$ ^[17]), 因此可以把时间复杂度的平均值降低到 $O(l \cdot \log(m) \cdot n^3)$ 。因此当 $n <$

$\frac{m}{(\log(m))^3}$ 时, K 维树将提高插值的效率。例如对

于一个较为粗略的气动载荷计算结果, 设表面网格数量约 5 千个(即 $m=5\,000$), 则当 $n < 2\,448$ 时, 改进后的 RBF 插值法将表现出速度优势。当缺少经验时, 可以通过随机选择少量插值点, 对设定的一组 n 的取值进行试算, 选择插值结果开始趋于稳定时的 n 值, 用于实际计算。一般而言, n 取在 200~300 时插值结果即已趋于稳定。

插值精度方面, 由于飞行器的蒙皮一般为薄壳结构, 因此与插值点有着相同欧氏距离的采样点可能分属不同的蒙皮, 而插值点的真实值应与其同侧蒙皮的采样结果有着更强烈的相关性。基于同属相同蒙皮的点之间法向距离分量一般应小于切向距离分量的假设, 通过将插值点与采样点距离分解为蒙皮法向与切平面内的距离, 并对法向距离进行非线性变化, 人为地加大法向距离, 再合成为修正后的距离, 修正后的距离的表示式

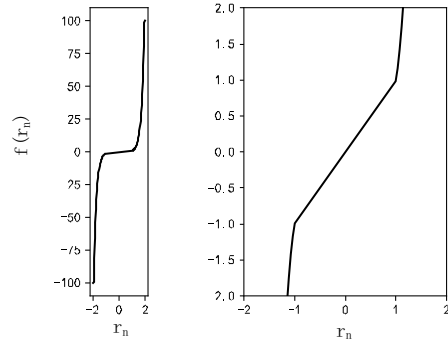
如下:

$$\hat{r}_i = \sqrt{r_i^2 + f^2(r_n)} \quad (6)$$

其中, r_i 和 r_n 分别代表采样点与插值点间在曲面切向和法向的距离(该距离含正/负号表示与向量同/反向), 修正法向距离 $f(r_n)$ 为一个连续分段函数:

$$f(r_n) = \begin{cases} r_n & (|r_n| < t) \\ t \cdot e^{\alpha(\frac{r_n}{t} - 1)} & (r_n \geq t) \\ -t \cdot e^{\alpha(-\frac{r_n}{t} - 1)} & (r_n \leq -t) \end{cases} \quad (7)$$

该函数的作用是使在合理偏移范围 t 以外, 采样点的距离以指数关系增加, 下图为 $t=1, \alpha=4$ 时的函数图像:



(a) 函数图像

(b) 局部放大后的图像

图 1 当 $t=1, \alpha=4$ 时的修正法向距离函数

Fig. 1 Modified normal distance function while $t=1, \alpha=4$

其中 t 的取值与输入的坐标单位及气动面几何尺度有关, 对于一般的飞机结构, 若以 mm 单位进行建模, 则 t 取 1~3 一般是恰当的。参数 α 的作用是放大 $(-t, t)$ 以外的方向距离, 当取 4 时, $2t$ 将被放大到约 $100t$ 。

综上, 改进 RBF 插值的过程包含以下步骤:

1) 首先将所有采样点坐标存储于 K 维树中, 根据待插值点的坐标 x 可以进行最近邻搜索, 找到与其距离最短的 N 个邻近点 $x_i (i=1, \dots, N)$;

2) 使用上述距离修正函数对邻近坐标点进行空间扭曲, 产生新的空间坐标: $\hat{x}_i = x_i + (f((x_i - x) \cdot n) - (x_i - x) \cdot n) n$

(这里的 n 是插值点处蒙皮的单位法向量)

3) 对扭曲后的 N 个邻近点坐标和对应压强值进行径向基函数插值, 得到插值结果。

2 算例与分析

下面用几个算例,分别从不同角度验证该算法的有效性。

2.1 相邻板算例

两块薄板(相对位置关系如图 2 所示),均匀分为边长为 4 mm 的四边形网格。将两块薄板表面的压强定义为关于坐标的函数,上下两块薄板表面的压强函数分别为

$$P_{bottom}(x, y, z) = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 10 \quad (8)$$

$$P_{top}(x, y, z) = -5x + 4y - 18$$

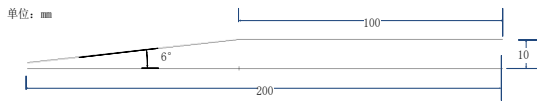


图 2 薄板相对位置关系
Fig. 2 Relative position of two thin plates

薄板上的压强分布如图 3 所示。

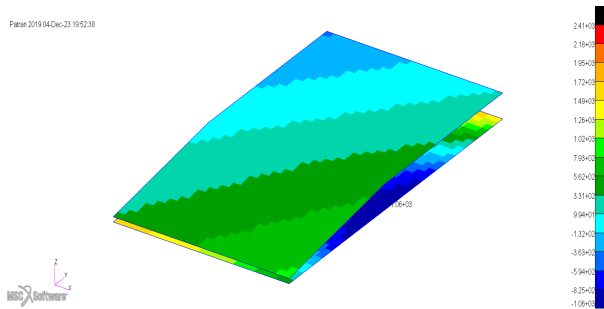


图 3 相邻板压强分布(单位:MPa)
Fig. 3 Pressure on neighboring planes(Unit:MPa)

对压强值根据均值和标准差进行正规化后,通过对 50 个随机取定的位置点,取不同数量的邻近点采用改进 RBF 插值法进行试算,与原始 RBF 插值法的结果进行比较得到 50 个插值点的平均偏差如图 4 所示,可以看出:邻近点取 250 左右时插值结果已趋于稳定。将不同邻近点数目的改进 RBF 插值法试算时长与原始 RBF 插值法计算时长进行比较,可以得到改进 RBF 插值法的效率优势如图 5 所示。该算例中,邻近点个数取 250 时,改进 RBF 插值法的用时约为原始 RBF 插值法用时的 40%。

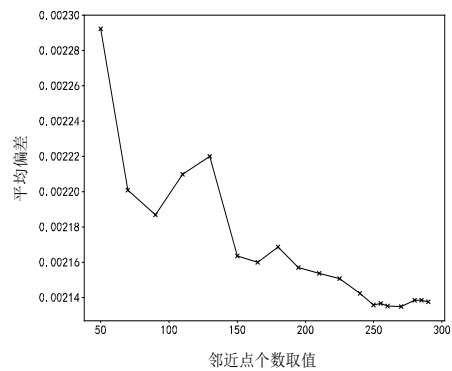


图 4 插值结果的平均偏差与改进 RBF 法采用的邻近点个数的关系

Fig. 4 Relationship between average deviation of interpolation results and the number of adjacent points used in the modified RBF method

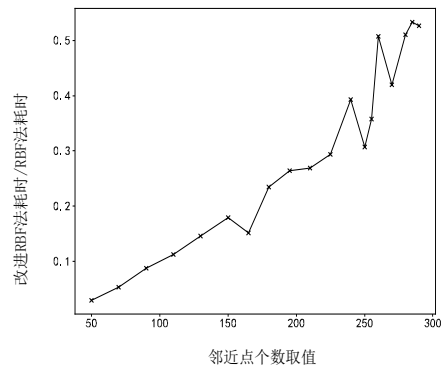


图 5 改进 RBF 法的效率优势与采用的邻近点个数的关系
Fig. 5 Relationship between the efficiency of the modified RBF method and the number of adjacent points used

在平面上随机选择 10% 的四边形网格当作插值点,其余网格当作采样点,分别使用改进 RBF 插值法(邻近点个数取 250)、RBF 插值法和 IDW 插值法,与原始值的误差情况如图 6 所示。

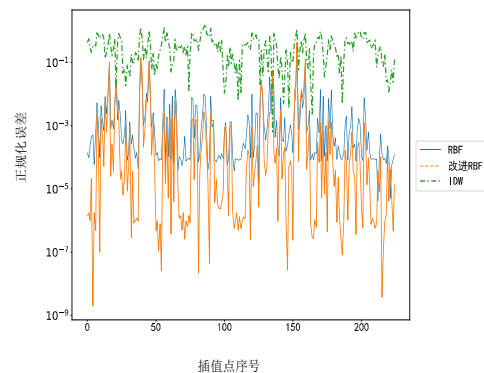


图 6 不同插值法的正规化误差
Fig. 6 Normalized error of different interpretation methods

从图 6 可以看出:本例中改进 RBF 插值法得到的结果总体优于 RBF 插值法的结果。与此同时,改进 RBF 插值法的结果均好于 IDW 插值法。

若随机选择当作插值点的网络数量占总网络数量的 40% 时,由于可以使用的采样点数量减小,平均误差($\frac{|插值结果 - 原始值|}{插值点数}$)略有增加,如表 1 所示。

表 1 不同插值法的平均误差
Table 1 Average Error of different interpretation methods

	RBF 插值法	IDW 插值法	改进 RBF 插值法	
			随机抽取 10%	随机抽取 40%
平均误差	0.006 0	0.359 1	0.005 6	0.005 7

该算例显示,改进 RBF 插值法,由于其将最邻近空间扭曲的特性,对相邻的薄板表面压强的插值问题可以取得更好的插值结果。与此同时,由于使用了 K 维树进行邻近点搜索,并选择了适当的

邻近点数目,提高了插值的效率。

2.2 翼面算例

本例对一个典型翼面结构(弦长 1 m,展长 3 m)进行计算流体力学(Computational Fluid Dynamics,简称 CFD)仿真得到的压强分布结果,分别使用 RBF 插值法、改进 RBF 插值法(邻近点数取 250)和 IDW 插值法将其施加到结构有限元网格上。计算原始输入与三种方法插值结果的合力与合力矩,如表 2 所示。对应方向向量的相对误差($|1 - \langle n_{ref}, n_{calc} \rangle|$,利用了向量重合时余弦值为 1 的性质)和合力、合力矩的相对误差如图 7 所示,可以看出:三种方法得到的合力、合力矩方向误差都很小,而 RBF 插值法和改进 RBF 插值法得到的合力、合力矩的相对误差均小于 1%。改进 RBF 插值法的合力相对误差略高于 RBF 插值法,但合力矩的相对误差接近于 0。IDW 插值的结果误差较大。

表 2 三种插值法的计算结果
Table 2 Results of three interpretation methods

	合力方向向量			合力矩方向向量			合力/N	合力矩/(N·m ⁻¹)
	x	y	z	x	y	z		
参考值	0.092 4	0.995 7	-0.000 6	0.012 3	-0.000 4	0.999 9	3 413	1 004
RBF	0.092 4	0.995 7	-0.000 6	0.012 3	-0.000 4	0.999 9	3 403	1 008
改进 RBF	0.086 5	0.996 3	0.000 1	0.013 6	-0.002 2	0.999 9	3 393	1 004
IDW	0.089 5	0.996 0	0.000 0	0.018 1	0.002 1	0.999 8	3 290	970

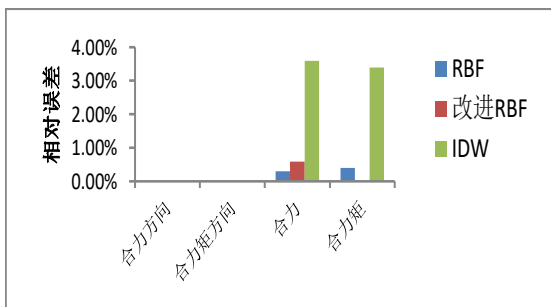


图 7 三种插值法的相对误差
Fig. 7 Relative error of three interpretation methods

以机翼压强分布为例,CFD 计算、RBF 插值计算、改进 RBF 插值技术以及 IDM 插值计算结果如图 8~图 11 所示。

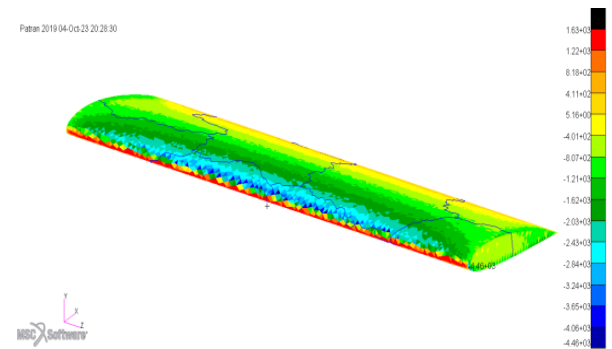


图 8 机翼压强分布(CFD 计算结果)(单位:MPa)
Fig. 8 Pressure on wing section (CFD result) (Unit:MPa)

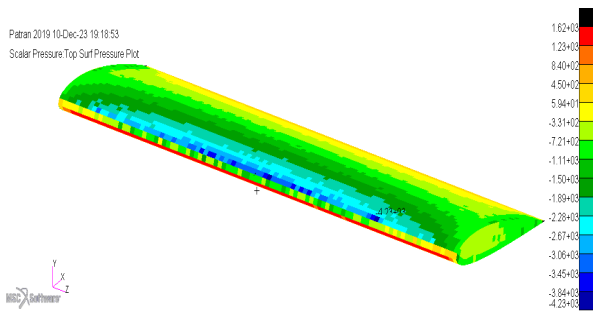


图9 机翼压强分布(RBF插值结果)(单位:MPa)

Fig. 9 Pressure on wing section (RBF method)
(Unit: MPa)

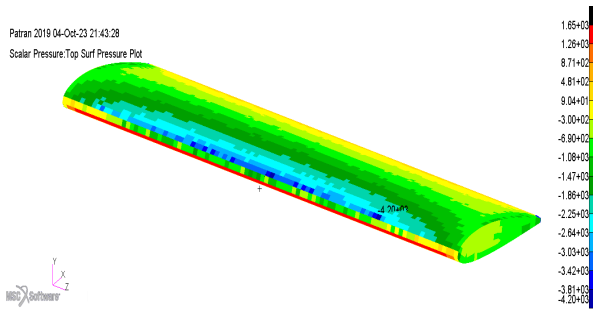


图10 机翼压强分布(改进RBF插值结果)(单位:MPa)

Fig. 10 Pressure on wing section (modified RBF method)
(Unit: MPa)

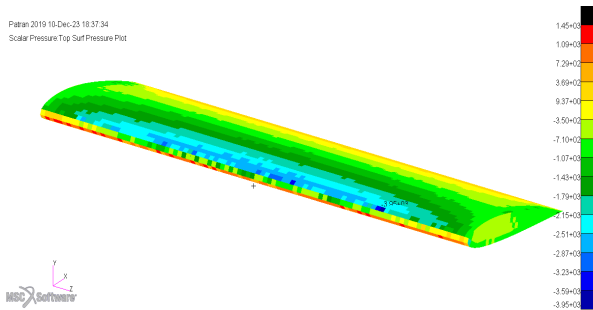


图11 机翼压强分布(IDM插值结果)(单位:MPa)

Fig. 11 Pressure on wing section (IDM method)
(Unit: MPa)

对比图8~图11可以看出:RBF插值法和改进RBF插值法得到的压强分布云图与原输入具有较强的一致性,但改进RBF插值法表现出一定的效率优势(约为原始RBF插值法耗时的一半)。IDM插值法得到的结果的分布基本相似,但取值范围和原始输入的差异相对两种RBF插值法稍大。

3 结论

1) 针对飞行器结构有限元分析中气动载荷施加问题,本文提出了一种改进的径向基函数

(RBF)插值法,该算法可实现节点坐标—压强形式的气动载荷空间插值,同时也可更灵活地对表面网格—压强场形式的气动载荷进行插值。

2) 该方法采用K维树数据结构存储采样点,插值时取邻近点进行插值,当邻近点数量 n 与总采样点数 m 满足 $n < \frac{m}{(\log(m))^{\frac{1}{3}}}$ 时,算法平均时间复杂度降低,可以提高插值计算的效率。

3) 该方法在插值过程中根据插值点与邻近采样点间的法向距离对空间进行扭曲,薄板算例显示该方法可以较好地排除非共面的邻近点对插值结果的干扰。

4) 对于典型飞行机结构的气动载荷插值计算表明,改进RBF法可以得到较为准确的合力矩结果,同时合力值误差也小于1%,插值结果云图与原始输入具有一致性。

参考文献

- [1] 雷莉,韩庆,钟小平.翼面结构节点载荷转换分配方法的比较分析[J].航空工程进展,2014,5(3):383-389.
LEI Li, HAN Qing, ZHONG Xiaoping. Comparative analysis of conversion distribution methods for wing structural node loads[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2014, 5(3): 383-389. (in Chinese)
- [2] 刘鑫,陈亮.机翼气动载荷向结构节点等效分配的三点分法[J].飞机设计,2022,42(5):14-17,28.
LIU Xin, CHEN Liang. The three-point method of transferring aerodynamic loads to FEM nodes for airfoil[J]. Aircraft Design, 2022, 42(5): 14-17, 28. (in Chinese)
- [3] 李海涛,邵泽东.空间插值分析算法综述[J].计算机系统应用,2019,28(7):1-8.
LI Haitao, SHAO Zedong. Review of spatial interpolation analysis algorithms[J]. Computer Systems & Applications, 2019, 28(7): 1-8. (in Chinese)
- [4] 柳鑫,李晨安,张成,等.反距离加权插值算法在空间温度场可视化中的应用[J].机电工程技术,2021,50(7):250-252.
LIU Xin, LI Chen'an, ZHANG Cheng, et al. Inverse distance weighted interpolation algorithm in the application of the visual space temperature field[J]. Mechanical & Electrical Engineering Technology, 2021, 50(7): 250-252. (in Chinese)
- [5] 李力,王天.基于薄板样条插值函数的气动分布载荷插值计算方法[J].中国科技信息,2021(22):26-27.
LI Li, WANG Tian. Interpolation calculation method for aerodynamic distributed load based on thin plate spline inter-

- polation function [J]. *China Science and Technology Information*, 2021(22): 26-27. (in Chinese)
- [6] 张建刚, 孙仁俊, 唐长红. 大型飞机气动载荷向有限元节点等效分配的方法[J]. *力学与实践*, 2017, 39(1): 25-29. ZHANG Jiangan, SUN Renjun, TANG Changhong. The method of transferring aerodynamic load to fem nodes for large airplane[J]. *Mechanics in Engineering*, 2017, 39(1): 25-29. (in Chinese)
- [7] 赵信男. 二维插值法在气动导数计算中的应用[J]. *飞机设计*, 2020, 40(3): 18-21, 25. ZHAO Jínan. Application of bivariate interpolation in calculation of aerodynamic derivatives [J]. *Aircraft Design*, 2020, 40(3): 18-21, 25. (in Chinese)
- [8] 王鸿丽. 径向基函数插值中形状参数的选取方法研究[D]. 唐山: 华北理工大学, 2021. WANG Hongli. Selection of shape parameters in radial basis function interpolation[D]. Tangshan: North China University of Science and Technology, 2021. (in Chinese)
- [9] 齐静. 径向基函数插值逼近的误差分析[J]. *湖北民族学院学报(自然科学版)*, 2016, 34(2): 162-165. QI Jing. The error analysis of radial basis function interpolation and approximation [J]. *Journal of Hubei University of Nationalities (Natural Science Edition)*, 2016, 34(2): 162-165. (in Chinese)
- [10] 靳晨晖, 王刚, 陈鑫, 等. 非结构嵌套网格中的一种改进型径向基函数插值方法[J]. *航空工程进展*, 2019, 10(5): 681-690. JIN Chenhui, WANG Gang, CHEN Xin, et al. An improved radial basis function interpolation method in unstructured overset grids [J]. *Advances in Aeronautical Science and Engineering*, 2019, 10(5): 681-690. (in Chinese)
- [11] 洪海峰, 康智聪, 谢亮. 径向基函数在高超声速热流插值中支撑点选择的判据研究[J]. *航空工程进展*, 2023, 14(2): 44-54. HONG Haifeng, KANG Zhicong, XIE Liang. Research on criterion of support point selection of radial basis function in hypersonic heat flux interpolation [J]. *Advances in Aeronautical Science and Engineering*, 2023, 14(2): 44-54. (in Chinese)
- [12] TOOVEY R W. Geography, Von Thünen. Tobler'S First Law: Tracing The Evolution of A Concept [J]. *Geographical Review*, 2022, 112(4): 591-607.
- [13] 郭中州, 何志强, 夏陈超, 等. 高效计算网格壁面距离的KD树方法[J]. *国防科技大学学报*, 2017, 39(4): 21-25. GUO Zhongzhou, HE Zhiqiang, XIA Chenchao, et al. Efficient KD-tree method for calculating grid wall distance [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2017, 39(4): 21-25. (in Chinese)
- [14] 潘卫军, 冷元飞, 吴天祎. 基于形态学和K近邻算法的飞机尾流识别[J]. *航空计算技术*, 2022, 52(2): 1-4. PAN Weijun, LENG Yuanfei, Wu Tianyi. Aircraft wake identification based on morphology and K-nearest neighbor algorithm [J]. *Aeronautical Computing Technique*, 2022, 52(2): 1-4. (in Chinese)
- [15] GOLUB G H, VAN LOAN C F. *Matrix Computations* [M]. 4th ed. Maryland: Johns Hopkins University Press, 2012: 116.
- [16] BROWN R A, Building a Balanced k-d Tree in $O(kn \log n)$ Time [J]. *Journal of Computer Graphics Techniques*, 2015, 4(1): 50-68.
- [17] SKRODZKI M. The k-d tree data structure and a proof for neighborhood computation in expected logarithmic time [EB/OL]. (2019-03-12) [2023-10-25]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1903.04936>.

(编辑:马文静)