

文章编号: 1674-8190(2024)05-016-16

# 试验模态分析方法及其在航空飞行器中的应用综述

惠心雨, 刘凡, 李晓东, 宋巧治

(中国飞机强度研究所 强度与结构完整性全国重点实验室, 西安 710065)

**摘要:** 试验模态分析是通过试验测定结构固有振动特性的方法, 其分析结果主要用于结构动力学模型修正, 并为结构动力学分析、气动弹性分析和振动控制设计提供数据支撑。本文系统梳理了国内外有关试验模态分析方法的研究进展, 从经典试验模态分析方法和现代试验模态分析方法两方面展开, 总结了经典的相位共振法和相位分离法两大主流方法的基本原理, 对近年来发展的试验模态分析方法进行了简单介绍, 归纳了不同模态分析方法的特点。最后指出了试验模态分析方法现今存在的问题与未来可能的发展趋势。

**关键词:** 试验模态分析; 地面振动试验; 相位共振法; 相位分离法

中图分类号: V216

文献标识码: A

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.2024.05.02

## A review of experimental modal analysis methods and their applications in aerospace vehicles

HUI Xinyu, LIU Fan, LI Xiaodong, SONG Qiaozhi

(National Key Laboratory of Strength and Structural Integrity, Aircraft Strength Research Institute of China, Xi'an 710065, China)

**Abstract:** Experimental modal analysis is a method of measuring the natural vibration characteristics of a structure through experiments. The analysis results are mainly used to modify the structural dynamic models and provide data support for structural dynamics, aeroelastic analysis and vibration control design. This article systematically reviews the research progress of experimental modal analysis methods at home and abroad, starting from two aspects: classic experimental modal analysis methods and modern modal analysis methods, and summarizes the basic principles of the two mainstream methods, the classic phase resonance method and the phase separation method, briefly introduces the experimental modal analysis methods developed in recent years, and summarizes the characteristics of different modal analysis methods. Finally, the current problems and possible future development trends of experimental modal analysis methods are given.

**Key words:** test modal analysis; ground vibration test; phase resonance method; phase separation method

收稿日期: 2024-03-12; 修回日期: 2024-09-06

通信作者: 宋巧治(1986-), 男, 硕士, 高级工程师。E-mail: jjss19870919@126.com

引用格式: 惠心雨, 刘凡, 李晓东, 等. 试验模态分析方法及其在航空飞行器中的应用综述[J]. 航空工程进展, 2024, 15(5): 16-31, 66.

HUI Xinyu, LIU Fan, LI Xiaodong, et al. A review of experimental modal analysis methods and their applications in aerospace vehicles[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2024, 15(5): 16-31, 66. (in Chinese)

## 0 引言

试验模态分析(Experimental Modal Analysis, 简称EMA)是根据试验输入/输出数据、频响函数(FRFs)或脉冲响应函数(IRFs)确定结构系统模态参数(频率、阻尼及振型等)的过程<sup>[1]</sup>,主要用于修正结构动力学有限元模型,进一步为结构动响应分析、气动弹性分析和振动控制等提供依据。虽然研究者们从20世纪初就开始尝试对结构振动特性进行估计,但受限于测量仪器与设备、计算机性能等,试验模态分析方法一直处于理论研究阶段,首次真正意义上的模态测试是由Kennedy等<sup>[2]</sup>在1947年开展的。随着高精度的力与响应传感器、计算机技术以及快速傅里叶变换在过去70余年的发展,EMA已经具有较为成熟的测试流程与测试算法,为人们研究固有特性的研究提供了可靠的测试工具<sup>[3]</sup>。

本文回顾试验模态分析方法的发展历程,并根据模态分析方法的特点及应用情况,总结经典与现代试验模态分析方法,对所开展的技术成果及工程应用进行详细描述,最后针对试验模态分析方法未来可能的发展方向提出建议与思考。

## 1 试验模态分析方法研究进展

试验模态分析方法主要分为两类,第一类是物理识别方法。这种试验模态分析方法使用正弦激励,通过调整力和频率,使结构的振动达到相位共振,即结构呈现出某一频率下的固有结构特性(纯模态,单相力的相位与加速度响应的相位差达 $90^\circ$ 或 $270^\circ$ )<sup>[4]</sup>。该方法将系统激励成单一的振动模态,并在共振处进行相位特征评估,因此也被称为纯模态法或相位共振法。

Lewis等<sup>[5]</sup>在1950年提出了相位共振法的基础理论(另一说相位共振法由法国国家航空航天研究院(ONERA)的Wasserburg方法发展而来<sup>[6]</sup>),并于1956年由Fraeijs<sup>[7]</sup>进一步细化;1958年,相位共振法的激振方法取得了重大进展<sup>[8-9]</sup>,但其基础理论自1950年起就基本没有变化,只不过随着计算机技术和测量仪器与设备制造技术的发展,相位共振法的自动化程度与精度有所提升。

虽然相位共振法模态测试精度较高,但其模态参数识别效率低,自20世纪中期,研究者们开始

研究通过数学拟合快速辨识模态参数的方法,逐渐发展出了第二类方法——数学识别。由于该方法的早期工作主要围绕如何使用相位信息识别测量数据中不同模态的影响,第二类方法也被称为相位分离法。相位分离法可以通过数学拟合的方式一次性估计多个模态参数,相比相位共振法(只能激励出单一模态)的分析效率得到了大幅提升,因此相位分离法成为主流模态测试方法<sup>[3]</sup>。

20世纪70年代之前的大部分相位分离法都针对单自由度系统,其中比较典型的是1947年Kennedy等<sup>[2]</sup>提出的圆拟合方法:应用模态频率附近阻抗的实部与虚部在复平面呈圆形的原理,通过观察共振区域相位的变化率来区分两种距离较近的模态;Stahle等<sup>[10]</sup>、Bishop等<sup>[11]</sup>、Pendered等<sup>[12-14]</sup>、Mahalingam<sup>[15]</sup>也对单自由度拟合的模态测试方法进行了研究。多自由度的相位分离法最早可以追溯到1971年的Klosterman<sup>[16]</sup>、1974年的Richardson等<sup>[17]</sup>和Loon<sup>[18]</sup>的研究工作。这些早期方法是现代试验模态参数分析方法的基础,初步涉及了多项式与部分分式模型等概念,但是算法不稳定,难以得出有效解。

1977年,Ibrahim等<sup>[19]</sup>提出了Ibrahim时域法(ITD),通过构建特征方程,依据特征值、特征向量与模态参数的关系来确定结构固有特性。1979年,Brown等<sup>[20]</sup>提出了最小二乘复指数方法(LSCE),通过构造多项式,采用最小二乘方法,通过曲线拟合方式求解系统极点,该方法通常分为两步:首先通过计算极点求出频率与阻尼,然后对模态振型进行求解。Vold等<sup>[21]</sup>于1982年将LSCE方法改进为多参考复指数法(PRCE),其精度得到了大幅提高,在很多商业分析软件中获得应用<sup>[22]</sup>。1984年,NASA所属的Langley研究中心发展了特征系统实现算法(ERA)<sup>[23-26]</sup>,通过输入/输出数据构造Hankel矩阵,并对Hankel矩阵进行奇异值分解(SVD),模态参数则由矩阵的特征值、特征向量确定。ERA一经提出,就在Galileo航天器和机载太阳能帆板的模态试验中得到了验证,有着较强的工程实用性,后续也得到了广泛推广与改进<sup>[27]</sup>。时间序列分析理论自1927年建立<sup>[28]</sup>,于20世纪60年代后期形成一套较为完整的分析方法,并成功应用于工程控制方面<sup>[29-31]</sup>。时间序列分析形成了AR、MA、ARMA等动态模型谱,能够将观测数据

外延,不会出现传统的傅里叶谱存在的分辨率低及弱信号被淹没等缺陷<sup>[27]</sup>。

上述方法分析数据类型主要为时域数据,可归类为时域模态参数识别法。频域法则基于频响函数分析,总体思路为对频响函数进行曲线拟合,从拟合曲线中获取模态参数。1986年,Richardson<sup>[32]</sup>运用正交多项式(OP)来表达频响函数的分子与分母。1988年,Shih等<sup>[33]</sup>将复模态指示函数(CMIF)的概念引入模态参数识别中,能够较好地识别出重根。1998年,Guillaume等<sup>[24]</sup>提出了最小二乘复频域法(LSCF),该方法采用 $z$ 域模型,在正则方程的数值性上得到大幅改善<sup>[34]</sup>,在小阻尼的分散模态系统和大阻尼的集中模态系统中均有较好的应用效果。2003年,Guillaume等<sup>[35-36]</sup>将LSCF推广至多参考点上,即多参考点最小二乘复频域法(PolyLSCF),该方法能够稳定、快速地得到清晰、准确的稳态图,在模态测试软件中得到了广泛的应用。此外,多重参考频域法(PFD)<sup>[37]</sup>、同步频域法(SFD)<sup>[38]</sup>、多参考频域法(MRFD)<sup>[39]</sup>、有理多项式法(RFP)<sup>[40]</sup>等频域模态分析及改进方法也在20世纪80年代提出,提升了计算效率<sup>[41-44]</sup>。

经过多年的发展,相位分离法衍生出多种模态分析方法:以自由度划分,有单自由度方法和多自由度方法;以使用的测量数据类型划分,有时域法和频域法;从采用的数值方法来分,有基于最小二乘法及其变体方法、奇异值分解等多种模态分析方法。

## 2 经典试验模态分析方法

### 2.1 相位共振法

相位共振法是Lewis等<sup>[5]</sup>提出的一种针对复杂结构的固有频率测试方法,其主要原理是通过施加可调节的激振力,使结构产生某一固有频率下的振荡运动。固有频率的性质是使结构上的点在同一时刻达到各自的最大位移,此时,将结构变形视为由特定的分布惯性载荷所引发,分布惯性载荷产生的弯矩、剪切力与结构弹性变形产生的弯矩、剪切力相抵消,假设结构无阻尼,同时撤去外力,结构将会维持稳定的振荡状态;但实际结构中必然存在阻尼,故试验中需通过对结构施加与阻尼力平衡的外力来维持结构的稳态振荡。

描述结构振荡的拉格朗日方程可以写为如下形式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

式中: $T$ 、 $U$ 分别为动能和势能; $q_i$ 为广义坐标,由 $n$ 个简谐波叠加而成。

$$q_i = \sum_{r=1}^n A_i^{(r)} \sin(\omega_r t + \phi_r) \quad (2)$$

令振幅 $A_i^{(r)} = \phi_i^{(r)} c_r$ ,并使用正则化条件:

$$\sum_{i=1}^n m_i \phi_r^{(i)2} = M \quad (3)$$

第 $r$ 阶模态的位移为

$$\xi_r = c_r \sin(\omega_r t + \phi_r) \quad (4)$$

则动能 $T$ 和势能 $U$ 可以以振荡形式表示:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} M \sum_{r=1}^n \dot{\xi}_r^2 \\ U = \frac{1}{2} M \sum_{r=1}^n \omega_r^2 \xi_r^2 \end{cases} \quad (5)$$

$Q_i$ 为广义力,在正弦激励的情况下, $Q_i = F_i \sin(\omega t + \psi)$ , $F_i$ 为广义力的第 $i$ 个分量的幅值,其与第 $r$ 阶模态位移的关系为

$$\Phi_r = \sum_{i=1}^n F_i \phi_i^{(r)} \quad (6)$$

运动方程可以简化为

$$\ddot{\xi}_r + \omega_r^2 \xi_r = (\Phi_r / M) \sin(\omega t + \psi) \quad (7)$$

稳态解为

$$\xi_r = \frac{\Phi_r}{K_r} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_r)^2} \sin(\omega t + \psi) \quad (8)$$

当 $\omega \rightarrow \omega_r$ 时,发生共振,其余模态对当前模态的影响可以忽略不计,此时的幅值比可以看作是第 $r$ 阶模态的幅值比。

当受到频率为 $\omega_r$ 的外力激励,结构处于共振状态,理论上所有被测点的位移/加速度响应均与激振力呈 $90^\circ$ 或 $270^\circ$ 的相位关系,即纯模态状态。但实际情况下,由于非线性等因素影响,所有测点都达到纯模态几乎是不可能的,为衡量模态的纯度,提出了模态指示函数 $C$ 这一指标,将全局响应归纳为一个总体目标进行衡量<sup>[45-46]</sup>:

$$C = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |\operatorname{Re}(\ddot{u}_i)| |\ddot{u}_i|}{\sum_{i=1}^n |\ddot{u}_i|^2} \quad (9)$$

式中: $\text{Re}(\ddot{u}_i)$ 为第*i*个响应点的实部; $|\ddot{u}_i|$ 为第*i*个响应点的模;*n*为响应点总数。

当 $C \rightarrow 1$ 时,认为飞机结构在该频率下呈固有结构特性,即纯模态。

基于上述概念与假设,通过调整激振力的布置方式与大小,使得振动的指示函数趋近于 1,对应的测试频率和响应幅值即为结构的固有频率与振型。试验证明,即使在具有不规则阻尼特性的非均匀结构中,通常也能获得满意的纯模态结果<sup>[5]</sup>。

相位共振法由于原理简单,结果可靠,不需要复杂的数学后处理,同时对大型复杂飞行器结构模态有较好的识别性,在国内外均得到了广泛的工程应用<sup>[47-49]</sup>,一直是航空飞行器模态测试的主要方法<sup>[50]</sup>。例如由 ONERA/DLR 联合 GVT 团队完成的空客 A300 B2<sup>[6]</sup>、A340-600<sup>[51]</sup>、A350XWB<sup>[52]</sup>、A380<sup>[53]</sup>等型号的地面共振试验,均采用了相位共振法,如图 1 所示。NASA 也对相位共振法开展了较多研究<sup>[54]</sup>,并应用于 JetStar<sup>[55]</sup>、U-8F<sup>[56]</sup>等型号的模式测试中。



图 1 ONERA/DLR 全机地面共振试验现场  
Fig. 1 ONERA/DLR full aircraft ground vibration test

在国内,中国飞机强度研究所自 1960 年至今,将相位共振法应用于包括 C919、AG600 在内的众多军用/民用飞机地面共振试验中。技术能力支撑了多型军用与民用航空/航天飞行器的部件/整机研制<sup>[57-59]</sup>,模态测试软件界面如图 2~图 3 所示,某型飞机试验现场测试照片如图 4 所示。

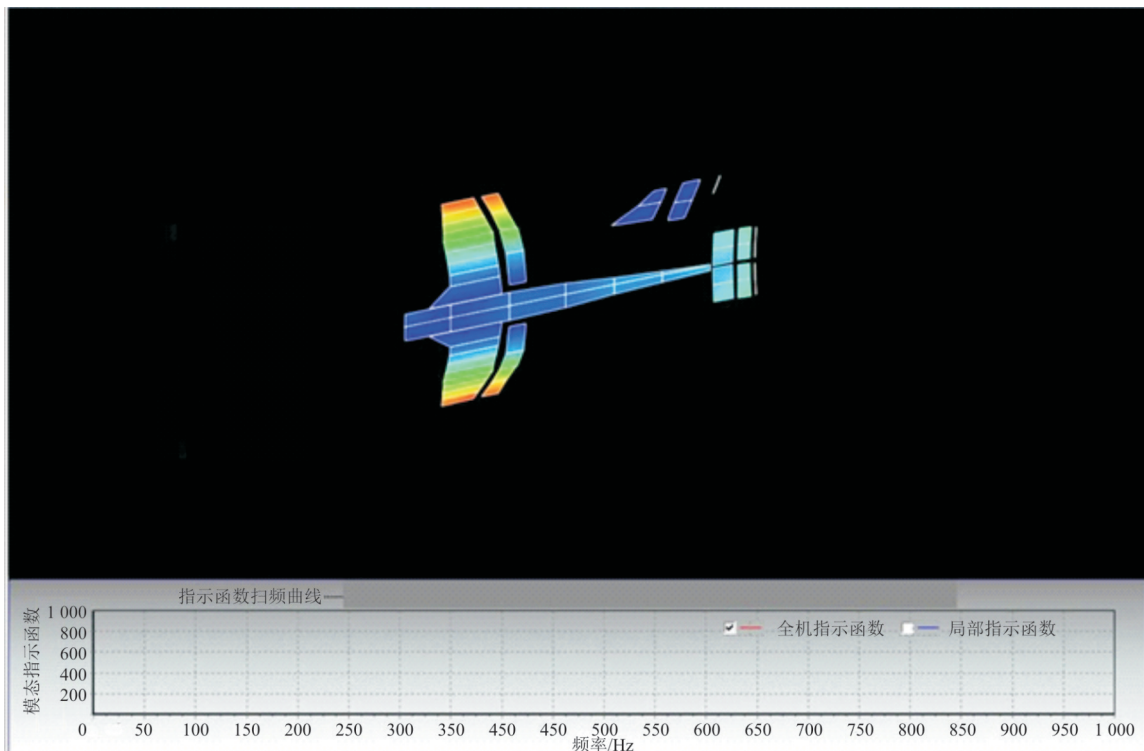
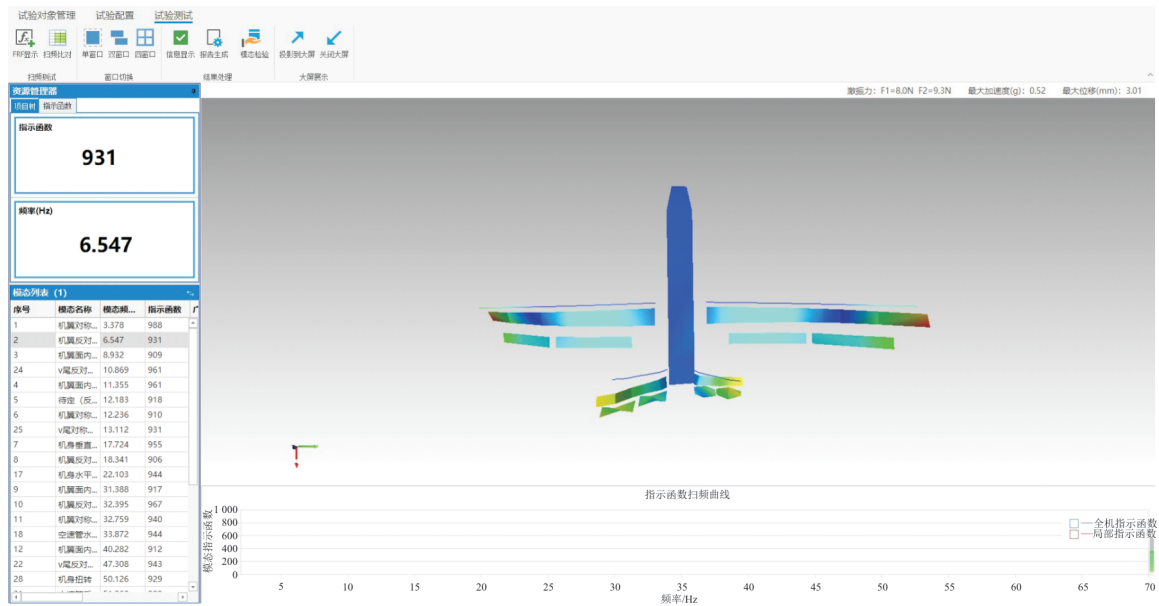


图 2 ModalStar 2.0 测试界面  
Fig. 2 Test interface of ModalStar 2.0



(a) GVTLab软件初始界面



(b) GVTLab测试与显示界面

图3 GVTLab振动模态测试系统  
Fig. 3 GVTLab modal test software



图4 中国飞机强度研究所某型飞机现场试验测试  
Fig. 4 On site testing of a certain type of aircraft by Aircraft Strength Research Institute of China

## 2.2 相位分离法

相位分离法经过70余年的发展,从单自由度局部估计(峰值检测、圆拟合等)发展至多自由度的整体估计(LSCE、ERA、时间序列分析法、正交多项式、CMIF、PolyLSCF),形成了较为成熟的模态参数分析理论与流程。本节仅对应用较为广泛的LSCE、ERA、时间序列分析法及PolyLSCF的理论与应用进行简要介绍,其他分析方法详见傅志方等<sup>[27]</sup>、沃德·海伦等<sup>[60]</sup>、Ewins<sup>[61]</sup>、Júlio等<sup>[62]</sup>撰写的专业书籍,在此不再赘述。

### 2.2.1 最小二乘复指数方法(LSCE)

最小二乘复指数方法(LSCE)的基础是最小二乘估计理论,依据IRF与极点和留数之间的关系来求解模态参数,因此也称作脉冲响应函数法<sup>[63]</sup>;由于LSCE在求解过程中会构造关于极点的Prony多项式,故也可以叫做Prony多项式方法<sup>[64]</sup>。

对于一个 $N$ 阶自由度的黏性阻尼系统,第 $p$ 个激励点在第 $l$ 个测量点引起的传递函数为

$$\hat{H}_{lp}(s) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{A_{lpr}}{s-s_r} + \frac{A_{lpr}^*}{s-s_r^*} \right) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{A_{lpr}}{s-s_r} \quad (10)$$

对式(10)进行拉氏变换,得到脉冲响应函数:

$$\hat{h}_{lp}(t) = \sum_{r=1}^N (A_{lpr} e^{s_r t} + A_{lpr}^* e^{s_r^* t}) = \sum_{r=1}^{2N} A_{lpr} e^{s_r t} \quad (11)$$

式中: $s_r = -\zeta_r \omega_r \pm j\sqrt{1-\zeta_r^2} \omega_r$ ,  $\omega_r$ 为第 $r$ 阶无阻尼模态频率, $\zeta_r$ 为第 $r$ 阶模态阻尼。

式(11)建立了IRF与模态参数(频率、阻尼)之间的函数关系<sup>[63]</sup>,将脉冲响应函数离散化,构造 $z$ 域的Prony多项式,首先求解变换因子,然后求出极点,从而得到频率与阻尼比;模态振型则由留数估计得到。进一步将LSCE推广至多参考点(PRCE),即推广至矩阵形式:构造IRF与振型、特征值及模态参与因子矩阵之间的复指数关系<sup>[63]</sup>。

LSCE具有鲁棒性强的优势,受系统阻尼、密频/重频以及噪声干扰影响小,能够较为准确地辨识结构模态参数,在航空、航天、桥梁及船舶等诸多工业领域中得到了广泛应用。

### 2.2.2 特征系统实现算法(ERA)

1985年, Juang等<sup>[23]</sup>提出了特征系统实现算法,该算法是对Ho-Kalman算法<sup>[65]</sup>的推广。ERA的实现是利用实测的脉冲响应函数,运用SVD,确定系统的阶次和状态方程中的系统矩阵 $A$ 、输入矩阵 $B$ 和输出矩阵 $C$ ,求解系统矩阵 $A$ 的特征值,从而确定系统的模态参数。当矩阵 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 的阶次最小时,即为最小实现。

一个有限维度、离散时间、线性、时不变系统的状态方程为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (12)$$

式中: $x(k)$ 为状态变量。

自由脉冲响应的时域表示形式由Markov参数给出:

$$Y(k) = CA^{k-1}B \quad (13)$$

通过构造Hankel矩阵并对其进行SVD,可以通过奇异向量矩阵得到矩阵 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 的最小实现。在求得系统矩阵 $A$ 后,确定模态参数。

ERA一经提出,便在伽利略航天器上进行了验证,次年又在航天飞机机载巨型太阳能帆板的太空模态试验中应用,均取得了良好的效果;1992年,NASA在PAH-2直升机<sup>[66]</sup>上进一步应用。2010年,Moncayo等<sup>[67]</sup>运用NExT-ERA耦合算法对T-34A教练机和DC-3型运输机进行了模态参数识别研究。

国内,秦仙蓉等<sup>[68]</sup>对ERA算法及其三种变形(FERA、ERA/DC、FERA/DC)的特性进行了研究,并以GARTEUR飞机模型为例,探讨了算法的优劣。付志超等<sup>[69]</sup>将ERA应用于大展弦比柔性机翼,测试了机翼的结构动力学特性。成玫等<sup>[70]</sup>对航天器大型薄壁结构开展了试验研究。

### 2.2.3 时间序列分析法

时间序列又被称为动态数据,是一组按照时间顺序(有序)排列的数据的集合。时间序列中的数据有着未知的内在联系及规律性,反映了当前系统的某种特性及未来可能的发展趋势。因此,可以通过对时间序列进行分析或辨识,研究系统的内在特性。由于其观测的随机性,时序分析是研究“历史”信息、预测其发展的一种方法。

通过构造时序模型,可以研究时序数据的内在联系与规律,时间序列分析方法是利用时序模型进行数据处理的方法。目前常见的时序模型包括差分模型、Prony模型。差分模型又有AR模型、MA模型和ARMA模型。

时序模型的关键在于确定模型的阶次,理论上讲,阶数较高的模型更能反映时序特性及系统特性,但实际计算中,由于参数均为估计得到,过高的模型阶次反而会导致误差增大。目前虽然有多种模型定阶准则,但还没有一个公认的检验准则,时序模型的定阶问题仍需要研究。当前普遍采用的是AIC准则<sup>[71]</sup>,另外也可以通过传递函数的极点是否变化来判断模型阶次是否合适。续秀忠等<sup>[72]</sup>通过信号时频变换确定模型阶次;Spiridonakos等<sup>[73]</sup>采用基于自由度数目的模型定阶方法;Giurcăneanu等<sup>[74]</sup>提出了基于遗忘因子的模型定阶方法等。

### 2.2.4 多参考点最小二乘复频域法(PolyLSCF)

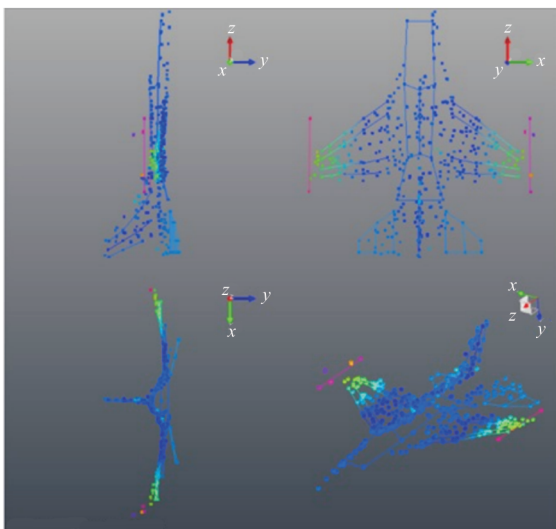
多参考点最小二乘复频域法(PolyLSCF)在

LMS Test. Lab 中也被称为 PolyMAX<sup>[75]</sup>, 该方法得到了广泛的验证与应用, LMS 在此基础上提出了 PolyMAX Plus<sup>[76]</sup> 方法。PolyLSCF 的主要思想是通过右矩阵分式来表示频响函数, 通过求解分母多项式的极点来确定固有频率, 再进一步以拟合的频响函数来计算模态参数。

PolyLSCF 对小阻尼、分散模态系统, 大阻尼、集中模态系统均有较好的识别结果, 作为 LMS Test. Lab 中成熟的 PolyMAX 模态分析模块的核心算法, 其鲁棒性与准确性亦得到了充分的验证与应用。在 A310、A330<sup>[50]</sup>、F-16<sup>[77]</sup>、A350XWB<sup>[52]</sup> 等众多型号中获得应用, LMS 开展的 F-16 地面振动测试现场如图 5 所示。除 LMS Test. Lab 软件外, 众多机构自研的模态测试软件, 如 EDM Modal 模态测试系统的 Poly-X, HBK 的 BK Connect 软件等<sup>[6]</sup>, 均是基于 PolyLSCF 方法发展而来<sup>[78-79]</sup>。



(a) 2008 年 F-16 试验现场



(b) 模态测试结果

图 5 LMS 地面振动测试<sup>[77]</sup>

Fig. 5 LMS ground vibration test result<sup>[77]</sup>

### 3 现代试验模态分析方法

经典模态分析方法基于线性时不变系统假设, 随着现代飞行器结构布局与使用环境逐渐趋于复杂, 系统非线性、时变特性显著, 经典模态分析方法难以适用复杂结构动力学特性的测试需求, 因此工程界发展出一系列现代试验模态分析方法。

#### 3.1 非线性系统试验模态分析方法

非线性系统与线性系统的模态特性具有本质区别: 非线性系统无法应用叠加原理、不能解耦运动方程、模态特性与系统能量相关等, 导致非线性模态的求解变得困难; 并且非线性类型多样、特性迥异, 尚无统一的非线性模态分析方法。

在航空飞行器中, 常规构型的非线性特性在工程尺度上可以忽略, 因此经典模态分析方法得到了广泛的使用。但两种典型系统: 含间隙系统及含摩擦系统的非线性特性必须在试验测试中加以考虑, 故本节将对上述系统的非线性试验模态分析方法进行介绍。

##### 3.1.1 含间隙系统的非线性试验模态分析方法

新一代战斗机在设计中采用了大面积直轴全动翼面以提高飞机机动性, 受结构形式、设计公差、零件生产超差、装配误差及固有磨损等不可避免的因素影响, 全动翼面存在弯曲间隙与旋转间隙的二元耦合及机构模态特性变化的特点, 具有强烈的非线性特征, 也是极易发生颤振的气动弹性设计难点<sup>[80]</sup>。

目前, 国内外对旋转间隙的一元间隙问题研究较多, 一般采用忽略非线性的等效线性方法进行分析, 对二元间隙结构适用性不足<sup>[81-82]</sup>。在当前的地面振动试验中, 多是在小间隙情况下开展变激振力激励, 获取激振力—频率的变化曲线, 得到翼面的频率, 如图 6 所示。

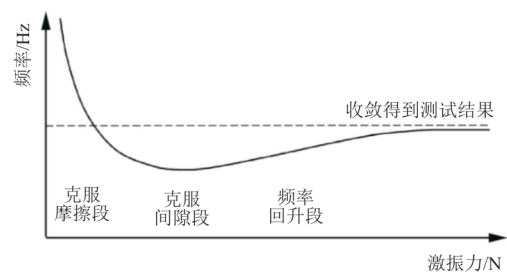


图 6 GVT 操纵面典型激振力—频率变化曲线<sup>[80]</sup>

Fig. 6 Typical force-frequency curve in GVT<sup>[80]</sup>

该方法虽然拥有较强的工程实用性,但受实际测试条件影响,存在三点不足:一是激振器只能以离散点的形式对操纵面进行激励,无法得到类似图6的光滑变化曲线;二是由于耦合间隙的影响,在不同的位置激励,得到的模态结果存在较大差异<sup>[82]</sup>;三是随着激振力的增加,结构响应逐渐增大,操纵面往往在频率尚未收敛时就达到了可承受的过载极限,此时必须停止激励,防止结构发生不可逆的破坏。为了准确地获取操纵面的动力学特性,需要对结构装配等影响因素进行控制,并在地面试验中多次测试,才能摸清操纵面的动力学特性。

因此,含间隙系统的非线性模态分析有着巨大的工程应用价值与前景,很多研究者对此问题进行了研究,如Kerschen等<sup>[83-84]</sup>对非线性系统辨识方法进行了详细的研究与总结。在众多方法中,当前应用较为广泛的有分段函数法、子空间法、谐波平衡法、恢复力曲面法、条件逆路径法、模式分解等。吕继航等<sup>[85]</sup>使用分段函数来描述间隙引起的非线性刚度;孙玉凯等<sup>[86]</sup>利用时域非线性子空间法,通过系统辨识获得间隙参数;Candon等<sup>[87]</sup>研究了非线性系统的快速参数辨识;Wang X Y等<sup>[88]</sup>提出了一种谐波平衡法的变体DQHB,用于估计极限环振荡;Wu Z G等<sup>[89]</sup>使用逆路径方法和自由界面模态综合法对折叠舵结构进行了辨识。但上述研究大多都是针对自由度较少的简单模型,不适用于地面振动试验。张平等<sup>[90]</sup>设计加工了克服舵面间隙的预加载系统,预加载使得系统不会进入间隙内,对操纵面的试验模态分析有一定的指导性,但需要通过静力加载反复调试,效率较低,尚未达到工程应用水平。

### 3.1.2 含摩擦系统的非线性试验模态分析方法

含摩擦系统的非线性模态是旋转机械关注的重点,如航空发动机等涡轮机械。摩擦非线性模态分析描述了结构共振时的运动方式,更适用于阻尼结构的设计。但因其强非线性与不确定性,摩擦非线性模态的分析成为一个具有挑战性的长期科学问题,主要的研究方向集中于仿真分析。例如建立摩擦模型<sup>[91]</sup>、利用模态综合法<sup>[92]</sup>降低求解规模等数值分析方法。

由于非线性模态与能量耗散相关,可以通过控制激振力幅值使得系统处于能量平衡状态,以

此为基础,可以求解出激发单一阻尼非线性模态所需要的激振力幅值,如图7所示。避免目标模态之外的响应,能够为经典模态试验分析推广至非线性试验模态分析提供一定的指导<sup>[93]</sup>。

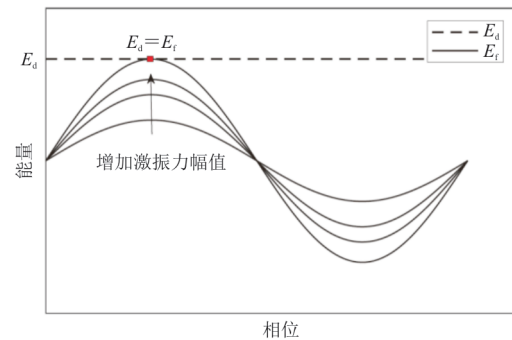


图7 单一阻尼非线性模态下的负阻尼项与受迫响应中不同激振力引起的能量变化<sup>[93]</sup>

Fig. 7 Negative damping term in single damped nonlinear mode and energy changes caused by different excitation forces in forced response<sup>[93]</sup>

当前对于航空发动机的模态试验来说,一般是利用加速度传感器测量力锤激励,得到传递函数进行参数辨识;或是使用声压传感器替代加速度传感器,基于振动和声的互易性进行参数拟合,这样做的好处是可以消除加速度传感器带来的附加质量,同时避免节线与局部模态对辨识结果的影响<sup>[94-95]</sup>。

## 3.2 时变系统试验模态分析方法

高超声速飞行器在飞行过程中受到严重的气动热,结构固有振动特性发生变化,具有典型时变特性,对飞行器的颤振边界预测带来无法忽视的影响,研究时变系统的模态分析方法具有非常重要的工程意义。对于时变结构来说,实际上不存在模态这一概念,是研究人员为了参照时不变结构提出的“伪概念”,即在一段时间内将结构“冻结”<sup>[96]</sup>,在该时间片段内将结构认为是时不变系统,从而进行模态分析<sup>[97]</sup>,热模态试验现场如图8所示。此类方法无法解决时间分辨率和频率分辨率的矛盾问题,虽然可以通过多次重复试验提升精度,但需要保证试验条件与试验件状态的可逆性,总体来说较为苛刻。

目前已有的时变结构模态参数分析方法主要分为两类:一是时域分析方法,是对现有时不变方



法的推广与改进,例如时间序列分析、子空间法等;二是频域分析方法,如时频域联合分析法和基于 Hilbert 变换的时变模态分析方法等。

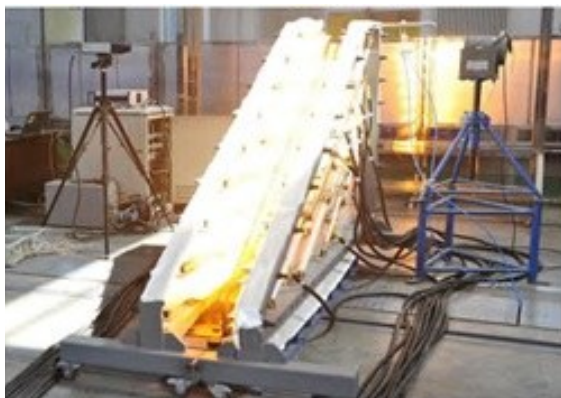


图 8 热模态试验<sup>[97]</sup>

Fig. 8 Thermal modal testing<sup>[97]</sup>

### 3.2.1 时域时变系统试验模态分析方法

#### 1) 时间序列分析方法

由于时序模型包含历史数据信息,多用于时变结构的参数识别中,时变系统的时间序列分析法可归纳于含有外部激励的时变自回归滑动平均(TARXMA)模型:

$$\mathbf{x}_k + \sum_{i=1}^{N_k} \mathbf{A}_{ik} \mathbf{x}_{k-i} = \sum_{i=1}^{N_k} \mathbf{B}_{ik} \mathbf{f}_{k-i} + \mathbf{e}_k + \sum_{i=1}^{N_k} \mathbf{C}_{ik} \mathbf{e}_{k-i} \quad (14)$$

Spiridonakos 等<sup>[73]</sup>和 Poulimenos 等<sup>[98]</sup>根据系数矩阵的变化约束将时间序列模型分为三类:非结构性参数演化(UPE)方法(不对系数矩阵的变化施加约束);随机性参数演化(SPE)方法(系数矩阵变化光滑);确定性参数演化(DPE)方法(系数矩阵变化具有特定数学形式)。DPE 方法较 UPE 方法和 SPE 方法具有更强的时变特性跟踪能力,可实现对多自由度时变结构的精确模态跟踪<sup>[99-100]</sup>,但会遇到数值不稳定、计算复杂、模型定阶困难等问题。

#### 2) 子空间法

子空间法基于时变系统的状态空间模型,如式(15)所示。由于系统矩阵与质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵之间有着显式数学关系,可以从状态空间模型中提取模态参数。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{f}(t) \end{cases} \quad (15)$$

目前应用较多的子空间法有三类,随机子空

间跟踪算法<sup>[101]</sup>、基于集总数据的子空间方法<sup>[102]</sup>和递推子空间算法<sup>[103]</sup>。其中随机子空间跟踪算法的数据连续性较差,基于集总数据的子空间方法的试验重复性较差,有较大的局限性;递推子空间算法则考虑了数据前后时刻的联系,实现了在线模态辨识。但总体来说,子空间法的辨识精度和跟踪能力还需进一步提升<sup>[104]</sup>。

### 3.2.2 频域时变系统试验模态分析方法

#### 1) 时频域联合分析方法

时频域联合分析方法在传统频率方法的基础上突出了时变特性。应用较为广泛的方法有 Gabor 展开<sup>[105]</sup>、短时傅里叶变换(STFT)<sup>[106]</sup>、小波变换(WT)<sup>[107]</sup>、Wigner-Ville 分布(WVD)<sup>[108]</sup>等。续秀忠等<sup>[109]</sup>通过 Gabor 展开进行信号分量重构,再使用 Hilbert 变换辨识瞬时频率与阻尼;白云鹤<sup>[110]</sup>结合短时傅里叶变换对高温舵面结构进行了时变模态分析;周思达等<sup>[111]</sup>使用时频域方法对高温下的升力面结构进行了模态分析。

时频分析法的缺点在于瞬时分辨率比较低,限制了其在密集模态时变系统中的应用潜力。近年来,Daubechies 等<sup>[112]</sup>、刘景良等<sup>[113]</sup>通过“挤压”时频能量,即同步压缩变换的方式(同步挤压小波变换),获得能量更为集中的时频谱,提高瞬时分辨率,能够更为精准地辨识出瞬时模态特性。此外,还有同步压缩 Fourier 变换(FSST)<sup>[114]</sup>、同步提取变换(SET)<sup>[115]</sup>、局部最大化同步压缩变换(LMS-ST)<sup>[116]</sup>和多同步压缩变换(MMST)<sup>[117]</sup>等方法,均是通过压缩能量的方式,提升模态辨识的分辨率。

#### 2) 基于 Hilbert 变换的时变模态分析方法

Hilbert 变换一般与经验模式分解(EMD)<sup>[118]</sup>、解析模式分解(AMD)<sup>[119]</sup>、变分模式分解(VMD)<sup>[120]</sup>等方法结合,原理是首先使用模式分解方法将多分量信号分解为一系列单组分信号,第二步再用 Hilbert 变换从单组分信号中辨识瞬时频率、瞬时阻尼比与 Hilbert 谱。

Hilbert 变换与 EMD 的组合一般被称为 Hilbert-Huang 变换(HHT),在风洞测力<sup>[121]</sup>、高超声速传力特性研究<sup>[122]</sup>等领域得到了广泛应用。但 HHT 存在分解耗时、抗噪能力差、模态混叠等缺陷,因此也衍生出如集合经验模式分解(EEMD)<sup>[123]</sup>、快速多变量经验模式分解(FMEMD)<sup>[124]</sup>等抗模态混叠、提升计算效率的改进 HHT 方法,但该类方法仍有很多问题尚未解

决。因此, Dragomiretskiy 等<sup>[120]</sup>提出了 VMD, VMD 以调幅调频信号为分解信号, 在时变结构参数辨识问题中具有天然优势, 在噪声鲁棒性、计算复杂度及收敛性上都优于 EMD。虽然 VMD 具有较好的瞬时模态辨识能力, 但其分解参数需要预先指定, 不恰当的参数会导致错误收敛, 目前尚无参数选择的理论指导。但总体来说, 该方法精度较高, 在时变结构参数辨识中有较大的发展潜力。

高温环境下的结构热模态试验, 受限于加热技术、加载技术、测量技术、采集技术等试验条件, 试验件多为平板<sup>[125]</sup>、翼舵<sup>[126]</sup>、机翼模型<sup>[127]</sup>等简单部件, 对复杂结构缺乏研究。

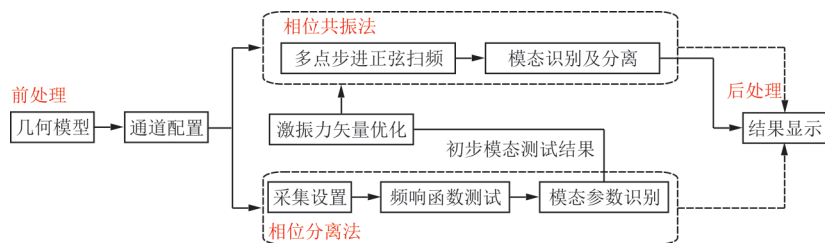


图 9 物理/数学一体化试验模态分析流程

Fig. 9 Procedure of physics/mathematics experimental modal analysis method

无论是在测试效率、测试精度或是测试的理论依据上, 物理/数学一体化试验模态分析方法比单一的相位共振法或相位分离法都有提升。

### 3.4 基于数据驱动的模式分析方法

基于神经网络的模态参数识别方法按照应用方法可以分为两类: 一类是基于计算机视觉的自主模态参数识别方法, 另一类是基于时间序列的结构动力学参数提取方法。

基于计算机视觉的方法依赖于神经网络本身的识别能力, 其思想是充分利用神经网络, 特别是卷积神经网络的图像识别与分类能力, 通过将人工标记过的稳态图作为训练样本, 实现对稳态图的自动识别<sup>[128-129]</sup>。另外也有通过神经网络进行峰值检测, 剔除虚假模态<sup>[130]</sup>, 或是结合长短时记忆网络发掘历史时空信息, 进行模态分析等方法<sup>[131]</sup>。

基于时间序列的方法则与经典模态分析方法较为相似, 主要利用神经网络的非线性建模能力, 以结构响应作为输入, 模态参数作为输出<sup>[132-133]</sup>, 原理简单, 不需要过多的人工干预, 自动化程度高。

虽然基于深度学习的方法效率较高, 但训练数据难以获取, 且训练完成的网络能够预测的范

### 3.3 物理/数学一体化试验模态分析方法

随着型号试验对测试精度与测试效率要求的提升, 单一使用相位共振法或相位分离法逐渐难以满足型号测试需求。因此发展出了物理/数学一体化试验模态分析方法, 其分析流程如图 9 所示。首先通过相位分离法快速得到频响函数曲线, 快速飞机结构频谱和初步的模态参数; 以该结果为基础, 对于非密集模态可直接使用相位共振法进行模态识别; 对于密集模态, 则开展激振力矢量优化, 优化得到的激振力矢量可以指导相位共振法中的激振力布置方案, 再对结构模态参数进行进一步的识别与分离。

围有限, 短时间内难以在工程中应用。

### 3.5 工作模态分析方法与冲击同步模态分析方法

#### 3.5.1 工作模态分析方法

工作模态分析 (OMA) 又称为纯输出模态分析、环境模态识别和非工作模态分析, 是一种用结构在工作状态下采集的响应数据来识别结构模态参数的技术。主要的 OMA 方法包括频域分解 (FDD)<sup>[134]</sup>、时域分解 (TDD)<sup>[135]</sup>、自然激励技术 (NExT)<sup>[136]</sup>、ARMA 及随机子空间 (SSI)<sup>[137]</sup> 等方法。由于 OMA 不需要输入激励<sup>[138]</sup>, 多用于结构较大, 无法通过人工激励获取响应或系统无法完全停机的情况, 如桥梁与建筑物等<sup>[139]</sup>。而航空飞行器可以在完全停机的状态下进行地面试验, 因此多采用较为成熟的 EMA 方法。但高速飞行器的刚体频率与弹性频率间“带宽”小, 经地面试验获得的模态频率与阻尼相比飞行状态要偏低偏小, 故可以发展飞行器工作模态分析技术, 为飞行姿态控制设计提供支持<sup>[140]</sup>。

#### 3.5.2 冲击同步模态分析方法

冲击同步模态分析方法 (ISMA) 是一种最新

提出的模态分析方法,它结合了EMA和OMA的优势:在系统运行时对系统进行激励,所有不期望的力所引发的响应都会在时域中被过滤掉,只剩下由力锤激发的响应。该方法是通过在进行快速傅里叶变换前使用冲击同步时间平均(ISTA)<sup>[141]</sup>来实现的,因此该方法叫做冲击同步模态分析方法(ISMA),模态识别的部分与EMA无区别。因为ISMA依靠冲击响应,对于大型结构可能导致非线性<sup>[142]</sup>,所以现在尚处于理论研究阶段。

## 4 试验模态分析方法总结与分析

根据上述讨论,各试验模态分析方法对比分析如表1所示。

表1 试验模态分析方法对比  
Table 1 Comparison between different experimental modal analysis methods

算法	计算域	局部/整体估计	自由度	多项式阶次	成熟度
相位共振法			多自由度		高度成熟
ITD				低阶	
LSCE	时域	整体	多自由度	高阶	高度成熟
ERA				低阶	
ARMA				高阶	
OP				高阶	
CMIF	频域	整体	多自由度		高度成熟
PolyLSCF				高阶	

1) 从方法上来看,试验模态分析方法的相似之处多于不同之处。它们都是从结构运动方程出发,目标是构建一个线性、时不变、互易性的特征矩阵,通过求解其特征值与特征向量,确定模态频率、阻尼与振型。

2) 从求解流程上看,模态分析方法一般可分为两步:第一步,根据FRF或IRF数据,建立多项式模型,求解一组超定线性方程组,得到多项式的根;第二步,根据第一步选择的模态频率与模态参与因子,从超定方程组中找到模态向量。至于模态分析方法的选择问题,从数值上来说时域方法可以更好地避免信号处理误差(如泄漏、加窗等),但频域方法在有噪声的测量条件下更为有效;从频率范围考虑,时域法更适合宽带分析,频域法更适合带外模态影响的情况;从阻尼情况考虑,时域法适合小阻尼系统,频域法适合大阻尼系统。当

然,也需要结合实际的测量条件来选择。

3) 随着飞行器结构形式与应用环境的复杂化,非线性与时变系统的试验模态分析方法已然成为当前的研究重点与热点,目前的研究方向主要集中在考虑舵结构间隙、叶片摩擦非线性与高超声速热时变参数辨识等。

## 5 结束语

通过总结国内外的研究进展,经典试验模态分析方法的基础理论与应用已较为成熟,目前仍是结构评估验证过程不可或缺的一环,在未来几十年仍是结构动力学分析关注的重点。由于现有方法在实际使用中强烈依赖于测试人员的经验,并且目前不存在统一的极点选择规范,测试结果的可重复性较差。而借助基于人工智能自动评估极点、消除结果不确定性的模态分析方法,不仅可以减少模态分析对测试人员经验的要求,还可以提供统一极点辨识标准的试验结果,是试验模态分析方法的研究热点。

随着飞行器的结构形式、应用环境渐趋复杂,现代试验模态分析方法已然成为这一领域的研究重点,也是保证未来飞行器研制的必要手段,需要进一步探索与研究。

### 参考文献

- [1] ALLEMANG R J, AVITABILE P. Handbook of experimental structural dynamics[M]. New York, USA: Springer, 2022.
- [2] KENNEDY C C, PANCU C D P. Use of vectors in vibration measurement and analysis[J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1947, 14(11): 603-625.
- [3] ALLEMANG R, BROWN D. Experimental modal analysis and dynamic component synthesis (Vol. 3)—modal parameter estimation [J/OL]. (1987-12-06) [2024-03-12]. [https://www.researchgate.net/publication/235122699\\_Experimental\\_Modal\\_Analysis\\_and\\_Dynamic\\_Component\\_Synthesis\\_Volume\\_3\\_Modal\\_Parameter\\_Estimation](https://www.researchgate.net/publication/235122699_Experimental_Modal_Analysis_and_Dynamic_Component_Synthesis_Volume_3_Modal_Parameter_Estimation).
- [4] 李晓东, 齐丕骞, 杨文岐. 相位共振/相位分离一体化技术在导弹模态试验中的应用[J]. 强度与环境, 2011, 38(3): 10-13.  
LI Xiaodong, QI Piqian, YANG Wenqi. The application of integrating phase resonance and phase separation to modal test for missile[J]. Structure & Environment Engineering, 2011, 38(3): 10-13. (in Chinese)
- [5] LEWIS R C, WRISLEY D L. A system for the excitation of pure natural modes of complex structure[J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1950, 17(11): 705-722.

- [6] GICLAIS S, LUBRINA P, STEPHAN C. Aircraft ground vibration testing at ONERA [J]. *Aerospace Lab*, 2016 (12): 1-18.
- [7] FRAEIJIS DE VEUBEKE B. A variational approach to pure mode excitation based on characteristic phase lag theories [R]. US: Rapport du LTAS, 1956.
- [8] TRAILL-NASH R W. On the excitation of pure natural modes in aircraft resonance testing[J]. *Journal of the Aerospace Sciences*, 1958, 25(12): 775-778.
- [9] ASHER G W. A method of normal mode excitation utilizing admittance measurements[C]// *Dynamics and Aeroelasticity National Specialists Meetings*. USA: Institute of the Aeronautical Sciences, 1958: 1-10.
- [10] STAHL C V, FORLIFER W R. Ground vibration testing of complex structures[C]// *Washington Flight Flutter Testing Symp*. USA: NASA, 1975: 23-31.
- [11] BISHOP R E D, GLADWELL G M L. An investigation into the theory of resonance testing[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1963, 255: 241-280.
- [12] PENDERED J W, BISHOP R E D. A critical introduction to some industrial resonance testing techniques[J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1963, 5(4): 345-367.
- [13] PENDERED J W, BISHOP R E D. Extraction of data for a sub-system from resonance test results[J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1963, 5(4): 368-378.
- [14] PENDERED J W, BISHOP R E D. The determination of modal shapes in resonance testing[J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1963, 5(4): 379-401.
- [15] MAHALINGAM S. On the determination of the dynamic characteristics of a vibrating system[J]. *The Journal of the Royal Aeronautical Society*, 1967, 71: 793-796.
- [16] KLOSTERMAN A L. On the experimental determination and use of modal representations of dynamic characteristics [J]. *AIAA Journal*, 1971, 9(11): 54-69.
- [17] RICHARDSON M, POTTER R. Identification of the modal properties of an elastic structure from measured transfer function data[C]// *20th International Instrumentation Symposium (ISA)*. USA: Instrument Society of America, 1974: 101-123.
- [18] LOON V. Modal parameters of mechanical structures[D]. Belgium: Katholieke University Leuven, 1974.
- [19] IBRAHIM S R, MIKULCIK E C. Method for the direct identification of vibration parameters from the free response [J]. *Shock Vib Bull*, 1977(47): 1-15.
- [20] BROWN D L, ALLEMANG R J, ZIMMERMAN R, et al. Parameter estimation techniques for modal analysis[C]// *SAE Technical Paper Series*. 400 Commonwealth Drive, Warrendale, PA, United States: SAE International, 1979: 828-846.
- [21] VOLD H, KUNDRAT J, ROCKLIN G T, et al. A multi-input modal estimation algorithm for mini-computers[C]// *SAE Technical Paper Series*. Warrendale, PA, US: SAE International, 1982: 815-821.
- [22] 许志杰. 有理拟合最小二乘复频域模态参数识别研究及软件实现[D]. 长沙: 中南大学, 2013.
- XU Zhijie. Research on modal parameter identification of rational fitting least squares complex frequency domain and its software implementation[D]. Changsha: Central South University, 2013. (in Chinese)
- [23] JUANG J N, PAPPAS R S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1985, 8(5): 620-627.
- [24] GUILLAUME P, VERBOVEN P, VANLANDUIT S. Frequency-domain maximum likelihood identification of modal parameters with confidence intervals[C]// *Proceedings of the International Seminar on Modal Analysis*. Germany: Springer, 1998: 359-366.
- [25] JUANG J N. Mathematical correlation of modal-parameter-identification methods via system-realization theory[J]. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 1987, 2: 115-130.
- [26] LONGMAN R W, JUANG J N. Recursive form of the eigensystem realization algorithm for system identification[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1989, 12(5): 647-652.
- [27] 傅志方, 华宏星. 模态分析理论与应用[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2000.
- FU Zhifang, HUA Hongxing. Modal analysis theory and application [M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2000. (in Chinese)
- [28] YULE G U. On a method of investigating periodicities disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 1927, 226: 267-298.
- [29] BOX G E, JENKINS G M. Time series analysis, control, and forecasting[M]. San Francisco, CA: Holden Day, 1976.
- [30] 张景绘, 邱阳. 时间序列分析在振动中的应用[J]. *振动与冲击*, 1983, 2(1): 3-11.
- ZHANG Jinghui, QIU Yang. The applications of analysis of time series to vibration[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1983, 2(1): 3-11. (in Chinese)
- [31] 傅志方, 施勤忠. 多维时序模型分析及其在模态参数识别中的应用[C]// *第三届全国振动理论及应用会议*. 哈尔滨: 中国振动工程学会, 1987: 1273-1280.
- FU Zhifang, SHI Qinzong. Multidimensional time series model analysis and its application in modal analysis[C]// *3rd National Conference on Vibration Theory and Application*. Harbin: Chinese Society for Vibration Engineering, 1987: 1273-1280. (in Chinese)
- [32] RICHARDSON M H. Global frequency & damping estimates from frequency response measurements [C]// *4th IMAC Conference*. USA: Society for Experimental Mechanics, 1986: 1-7.
- [33] SHIH C Y, TSUEI Y G, ALLEMANG R J, et al. Complex mode indication function and its applications to spatial domain parameter estimation [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1988, 2(4): 367-377.
- [34] VAN DER AUWERAER H, GUILLAUME P, VER-

- BOVEN P, et al. Application of a fast-stabilizing frequency domain parameter estimation method[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2001, 123(4): 651-658.
- [35] GUILLAUME P, VERBOVEN P, VANLANDUIT S, et al. A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator[C]// *Proceedings of IMAC*. USA: Society for Experimental Mechanics, 2003: 214-225.
- [36] PEETERS B, VAN DER AUWERAER H, GUILLAUME P, et al. The PolyMAX frequency-domain method: A new standard for modal parameter estimation? [J]. *Shock and Vibration*, 2004, 11(3/4): 395-409.
- [37] ZHANG L, KANDA H, BROWN D L, et al. A polyreference frequency domain method for modal parameter identification[J]. *ASME Paper*, 1985(85): 106-118.
- [38] COPPOLINO R N. A simultaneous frequency domain technique for estimation of modal parameters from measured data [C]// *SAE Technical Paper Series*. Warrendale, PA, US: SAE International, 1981: 1-19.
- [39] CRAIG JR R R, KURDILA A J, KIM H M. State-space formulation of multi-shaker modal analysis[C]// *International Modal Analysis Conference*. USA: Society for Experimental Mechanics, 1987: 102-121.
- [40] LEURIDAN J M. Some direct parameter model identification methods applicable for multiple input modal analysis [M]. Cincinnati: University of Cincinnati, 1984.
- [41] LIU J M, ZHU W D, LU Q H, et al. An efficient iterative algorithm for accurately calculating impulse response functions[M]// *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*. New York: Springer, 2012: 113-125.
- [42] LIU J M, DONG S W, YING M, et al. Autonomous identification of the fast time-varied modal parameters [M]// *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*. New York: Springer, 2012: 99-111.
- [43] LIU J M, ZHU W D, YING M, et al. Fast precise algorithm of computing FRF by considering initial response [M]// *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*. New York: Springer, 2013: 343-352.
- [44] LIU J M, XU Y F, ZHU W D. New coherence function with measurements of one sampling period[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 88: 354-376.
- [45] 李智劳, 刘凡, 郭艳. 某长航时无人机地面模态试验研究[J]. *现代商贸工业*, 2017, 38(17): 183-184.  
LI Zhilao, LIU Fan, GUO Yan. Experimental study on ground modal of a long-endurance UAV[J]. *Modern Business Trade Industry*, 2017, 38(17): 183-184. (in Chinese)
- [46] 孟霞, 李喆, 王德禹. 复合材料板架结构中纯模态试验技术的应用[J]. *噪声与振动控制*, 2013, 33(2): 198-200.  
MENG Xia, LI Zhe, WANG Deyu. Pure modal test technique and its application in composite panels[J]. *Noise and Vibration Control*, 2013, 33(2): 198-200. (in Chinese)
- [47] VAN DER AUWERAER H, OTTE D, LEURIDAN J, et al. Modal testing with multiple sinusoidal excitation[C]// *Proceedings of IMAC 9 International Modal Analysis Conference*. USA: Society for Experimental Mechanics, 1991: 12-23.
- [48] OTTE D, VAN DER AUWERAER H, DEBILLE J, et al. Enhanced force vector appropriation methods for normal mode testing [C]// *Proceedings of SPIE-the International Society for Optical Engineering*. USA: Society of Photo-optical Instrumentation Engineers, 1993: 1310-1316.
- [49] BALMES E, CHAPELIER C, LUBRINA P, et al. An evaluation of modal testing results based on the force appropriation method[C]// *Proceedings of IMAC*. USA: Society for Experimental Mechanics, 1995: 1-11.
- [50] PEETERS B, HENDRIX W, DEBILLE J, et al. Modern solutions for ground vibration testing of large aircraft[J]. *Sound and Vibration*, 2009, 43(1): 8-15, 6.
- [51] LAU J, DEBILLE J, PEETERS B, et al. Advanced systems and services for ground vibration testing-application for a research test on an Airbus A340-600 aircraft [C]// *Proceedings "IFASD 2011"*. US: IFASD, 2011: 1135-1148.
- [52] GOVERS Y, BÖSWALD M, LUBRINA P, et al. AIRBUS A350XWB ground vibration testing: efficient techniques for customer oriented on-site modal identification [C]// *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering*. Belgium: KU Leuven, 2014: 2503-2516.
- [53] GÖGE D, BÖSWALD M, FÜLLEKRUG U, et al. Ground vibration testing of large aircraft-state-of-the-art and future perspectives[C]// *25th International Modal Analysis Conference*. USA: Society for Experimental Mechanics, 2007: 36-54.
- [54] STAHL C V, FORLIFER W R. Ground vibration testing of complex structures[C]// *Washington Flight Flutter Testing Symp*. USA: NASA, 1975: 85-96.
- [55] KEHOE M W, VORACEK D F. Ground vibration test results of a jet star airplane using impulsive sine excitation [C]// *International Modal Analysis Conference*. USA: Society for Experimental Mechanics, 1989: 78-94.
- [56] KEHOE M W. Modified US Army U-8F ground vibration test[R]. USA: NASA, 1986.
- [57] 李智劳, 李晓东, 刘凡. 具有间隙非线性影响的外挂物的模态试验研究[J]. *化工管理*, 2017(18): 37-38.  
LI Zhilao, LI Xiaodong, LIU Fan. Modal experimental study on stores with clearance nonlinearity[J]. *Chemical Enterprise Management*, 2017(18): 37-38. (in Chinese)
- [58] 李智劳, 李晓东, 刘凡. 某大展弦比飞机全机地面模态试验研究[J]. *通讯世界*, 2017, 24(11): 284-285.  
LI Zhilao, LI Xiaodong, LIU Fan. Experimental study on ground modal of a large aspect ratio aircraft [J]. *Telecom World*, 2017, 24(11): 284-285. (in Chinese)
- [59] 李晓东, 杨文岐, 刘凡. 现代飞机地面振动试验准备及设计技术[J]. *机械科学与技术*, 2013, 32(6): 879-883.  
LI Xiaodong, YANG Wenqi, LIU Fan. Test design and preparation techniques of modern aircraft GVT[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2013, 32(6): 879-883. (in Chinese)
- [60] 沃德·海伦. 模态分析理论与试验[M]. 白化同, 郭继忠,

- 译. 北京: 北京理工大学出版社, 2001.
- HEYLEN H. Modal analysis theory and testing[M]. Translated by BAI Huatong, GUO Jizhong. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2001. (in Chinese)
- [61] EWINS D J. Modal testing: theory, practice and application [M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009.
- [62] JÚLIO M M S, NUNO M M M. Modal analysis and testing [M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2012.
- [63] 徐敏建. 空间网格结构损伤识别及系统研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007.
- XU Minjian. Damage identification and system research of spatial grid structure[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2007. (in Chinese)
- [64] 董婷. 基于神经网络的模态参数识别方法研究[D]. 长沙: 中南大学, 2013.
- DONG Ting. Research on modal parameter identification method based on neural network [D]. Changsha: Central South University, 2013. (in Chinese)
- [65] KALMAN R, HO B. Effective construction of linear state variable models from input output data[C]// Proceedings of 3rd Allerton Conference. USA: University of Illinois, 1965: 449-459.
- [66] SCHENK A, PAPPAS R S. Rigid body mode identification of the PAH-2 helicopter using the eigensystem realization algorithm[R]. USA: NASA, 1992.
- [67] MONCAYO H, MARULANDA J, THOMSON P. Identification and monitoring of modal parameters in aircraft structures using the natural excitation technique (NExT) combined with the eigensystem realization algorithm (ERA)[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2010, 23(2): 99-104.
- [68] 秦仙蓉, 王彤, 张令弥. 模态参数识别的特征系统实现算法: 研究与比较[J]. 航空学报, 2001, 22(4): 340-342.
- QIN Xianrong, WANG Tong, ZHANG Lingmi. Comparison of different variants of the eigensystem realization algorithm in modal parameter identification[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2001, 22(4): 340-342. (in Chinese)
- [69] 付志超, 仲维国, 陈志平, 等. 大展弦比柔性机翼的结构动力学特性试验研究[J]. 航空学报, 2013, 34(9): 2177-2184.
- FU Zhichao, ZHONG Weiguo, CHEN Zhiping, et al. Experimental study on structural dynamic characteristics of flexible high-aspect-ratio wings[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(9): 2177-2184. (in Chinese)
- [70] 成攻, 蒋敏. 基于特征系统实现算法的天线类产品在轨模态辨识方法研究[J]. 应用技术学报, 2018, 18(2): 168-172.
- CHENG Mei, JIANG Min. Research on the modal identification method of antenna products on orbit based on eigensystem realization algorithm[J]. Journal of Technology, 2018, 18(2): 168-172. (in Chinese)
- [71] AKAIKE H. Maximum likelihood identification of Gaussian autoregressive moving average models [J]. Biometrika, 1973, 60(2): 255-265.
- [72] 续秀忠, 张志谊, 华宏星, 等. 应用时变参数建模方法辨识时变模态参数[J]. 航空学报, 2003, 24(3): 230-233.
- XU Xiuzhong, ZHANG Zhiyi, HUA Hongxing, et al. Identification of time-variant modal parameters by a time-varying parametric approach [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2003, 24(3): 230-233. (in Chinese)
- [73] SPIRIDONAKOS M D, POULIMENOS A G, FASSOIS S D. Output-only identification and dynamic analysis of time-varying mechanical structures under random excitation: a comparative assessment of parametric methods[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(7): 768-785.
- [74] GIURCĂNEANU C D, RAZAVI S A. AR order selection in the case when the model parameters are estimated by forgetting factor least-squares algorithms[J]. Signal Processing, 2010, 90(2): 451-466.
- [75] MULDER L. Applied frequency-domain system identification in the field of experimental modal analysis [D]. Holland: University of Twente, 2017.
- [76] PEETERS B, EL-KAFAY M, GUILLAUME P. The new PolyMAX Plus method: confident modal parameter estimation even in very noisy cases[C]// Proceedings of the ISMA. Belgium: KU Leuven, 2012: 2801-2813.
- [77] LAU J, PEETERS B, DEBILLE J, et al. Ground vibration testing master class: modern testing and analysis concepts applied to an F-16 aircraft[C]// Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. New York: Springer, 2011: 221-228.
- [78] 刘路, 张伟, 王鹏飞. 柔性飞艇主气囊湿模态分析及试验研究[J]. 航空工程进展, 2022, 13(4): 162-167.
- LIU Lu, ZHANG Wei, WANG Pengfei. Wet modal analysis and experiment research on flexible airship main airbag [J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2022, 13(4): 162-167. (in Chinese)
- [79] 张召娜, 孙长福. 基于模态分析的配电产品耐振性优化设计[J]. 航空工程进展, 2020, 11(5): 730-737.
- ZHANG Zhaona, SUN Changfu. Optimization design of distribution product vibration resistance based on modal analysis [J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2020, 11(5): 730-737. (in Chinese)
- [80] 李秋彦, 李刚, 魏洋天, 等. 先进战斗机气动弹性设计综述 [J]. 航空学报, 2020, 41(6): 523430.
- LI Qiuyan, LI Gang, WEI Yangtian, et al. Review of aeroelasticity design for advanced fighter [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2020, 41(6): 523430. (in Chinese)
- [81] 陈识, 李秋彦, 冉玉国. 具有二维间隙非线性的全动舵面动力特性研究[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2017, 30(1): 60-64.
- CHEN Shi, LI Qiuyan, RAN Yuguo. Research on the vibration characteristics of an all-movable wing with two dimensional freeplay nonlinearity [J]. Journal of Sichuan University of Science & Engineering (Natural Science Edition), 2017, 30(1): 60-64. (in Chinese)
- [82] 赵永辉, 胡海岩. 具有操纵面间隙非线性二维翼段的气动弹性分析[J]. 航空学报, 2003, 24(6): 521-525.
- ZHAO Yonghui, HU Haiyan. Aeroelastic analysis of a two-dimensional airfoil with control surface freeplay nonlinearity [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2003, 24(6): 521-525. (in Chinese)

- [83] KERSCHEN G, WORDEN K, VAKAKIS A F, et al. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2006, 20(3): 505-592.
- [84] NOËL J P, KERSCHEN G. Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 83: 2-35.
- [85] 吕继航, 罗琳胤. 大型飞机操纵面极限环颤振特性研究[J]. *力学与实践*, 2020, 42(4): 418-423.  
LYU Jihang, LUO Linyin. Limit cycle flutter characteristics related to control surface of large aircraft[J]. *Mechanics in Engineering*, 2020, 42(4): 418-423. (in Chinese)
- [86] 孙玉凯, 杨超, 吴志刚. 含间隙非线性二元翼段的系统辨识[J]. *北京航空航天大学学报*, 2021, 47(1): 140-149.  
SUN Yukai, YANG Chao, WU Zhigang. System identification of a 2-DOF wing section with freeplay nonlinearity[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2021, 47(1): 140-149. (in Chinese)
- [87] CANDON M, LEVINSKI O, OGAWA H, et al. A nonlinear signal processing framework for rapid identification and diagnosis of structural freeplay[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 163: 107999.
- [88] WANG X Y, WU Z G, SUN Y K, et al. A novel method for estimating three-domain limit cycles in a 3D wing-aileron model with freeplay in aileron deflection[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2021, 105: 103286.
- [89] WU Z G, YANG N, YANG C. Identification of nonlinear structures by the conditioned reverse path method[J]. *Journal of Aircraft*, 2015, 52(2): 373-386.
- [90] 张平, 刘畅, 田鑫海, 等. 预载下带间隙舵面旋转频率测试方法研究[J]. *机械科学与技术*, 2022, 41(10): 1636-1640.  
ZHANG Ping, LIU Chang, TIAN Xinhai, et al. Study on testing method of rotation frequency of control surface with gap under preloading[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2022, 41(10): 1636-1640. (in Chinese)
- [91] DAHL P R. Solid friction damping of mechanical vibrations[J]. *AIAA Journal*, 1976, 14(12): 1675-1682.
- [92] HURTY W C. Dynamic analysis of structural systems using component modes[J]. *AIAA Journal*, 1965, 3(4): 678-685.
- [93] 王相乾. 含接触界面的叶片非线性模态分析方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2022.  
WANG Xiangqian. Study on nonlinear modal analysis method of blades with contact interface[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2022. (in Chinese)
- [94] 陈国一, 雷霆, 王和, 等. 航空发动机叶片声振模态试验方法研究[J]. *环境技术*, 2020, 38(6): 22-25, 41.  
CHEN Guoyi, LEI Ting, WANG He, et al. Study on acoustic modal test method of aero-engine blade[J]. *Environmental Technology*, 2020, 38(6): 22-25, 41. (in Chinese)
- [95] ZHU W D, LIU J M, XU Y F, et al. A modal test method using sound pressure transducers based on vibro-acoustic reciprocity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(13): 2728-2742.
- [96] 宋巧治, 李晓东, 杨文岐. 基于 Chirp-Z 变换的结构热模态试验方法[J]. *工程与试验*, 2021, 61(2): 18-20, 47.  
SONG Qiaozhi, LI Xiaodong, YANG Wenqi. Test method for structural thermal modal based on Chirp-Z transformation[J]. *Engineering & Test*, 2021, 61(2): 18-20, 47. (in Chinese)
- [97] 李晓东, 杨文岐, 刘浩. 基于纯随机激励的热模态试验技术研究[J]. *强度与环境*, 2015, 42(2): 52-56.  
LI Xiaodong, YANG Wenqi, LIU Hao. The study of thermo-modal test technique based on true-random excitation[J]. *Structure & Environment Engineering*, 2015, 42(2): 52-56. (in Chinese)
- [98] POULIMENOS A G, FASSOIS S D. Parametric time-domain methods for non-stationary random vibration modelling and analysis—a critical survey and comparison[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2006, 20(4): 763-816.
- [99] MA Z S, LIU L, ZHOU S D, et al. Output-only modal parameter recursive estimation of time-varying structures via a kernel ridge regression FS-TARMA approach[J]. *Shock and Vibration*, 2017, 155: 8176593.
- [100] ZHOU S D, MA Y C, LIU L, et al. Output-only modal parameter estimator of linear time-varying structural systems based on vector TAR model and least squares support vector machine[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 98: 722-755.
- [101] 庞世伟, 于开平, 邹经湘. 识别时变结构模态参数的改进子空间方法[J]. *应用力学学报*, 2005, 22(2): 184-188, 332.  
PANG Shiwei, YU Kaiping, ZOU Jingxiang. Improved subspace method with application in linear time-varying structural modal parameter identification[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2005, 22(2): 184-188, 332. (in Chinese)
- [102] LIU K F. Extension of modal analysis to linear time-varying systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 226(1): 149-167.
- [103] TASKER F, BOSSE A, FISHER S. Real-time modal parameter estimation using subspace methods: theory[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1998, 12(6): 797-808.
- [104] 刘帅帅. 基于模式分解的结构时变模态参数和非线性参数辨识方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2022.  
LIU Shuaishuai. Research on identification method of time-varying modal parameters and nonlinear parameters of structures based on mode decomposition[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2022. (in Chinese)
- [105] GABOR D. Theory of communication(Part 1): the analysis of information[J]. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III: Radio and Communication Engineering*, 1946, 93(26): 429-441.
- [106] DURAK L, ARIKAN O. Short-time Fourier transform: Two fundamental properties and an optimal implementation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(5): 1231-1242.
- [107] GILLES J. Empirical wavelet transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(16): 3999-4010.

- [108] KATUNIN A. Damage identification and quantification in beams using Wigner-ville distribution [J]. *Sensors*, 2020, 20(22): 6638.
- [109] 续秀忠, 张志谊, 华宏星, 等. 应用时频分析方法辨识时变系统的模态参数[J]. *振动工程学报*, 2003, 16(3): 230-233. XU Xiuzhong, ZHANG Zhiyi, HUA Hongxing, et al. Identification of time-varying modal parameters by a linear time-frequency method [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(3): 230-233. (in Chinese)
- [110] 白云鹤. 高速飞行器飞行环境下结构模态试验及参数识别方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013. BAI Yunhe. Research on structural modal test and parameter identification method of high-speed aircraft in flight environment [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2013. (in Chinese)
- [111] 周思达, 刘莉, 李昱霖, 等. 高速飞行器热结构工作时变模态参数辨识[J]. *航空学报*, 2015, 36(1): 373-380. ZHOU Sida, LIU Li, LI Yulin, et al. Operational identification of time-varying modal parameters for thermal structures of high-speed aerial vehicles [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2015, 36(1): 373-380. (in Chinese)
- [112] DAUBECHIES I, LU J F, WU H T. Synchrosqueezed wavelet transforms: an empirical mode decomposition-like tool [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2011, 30(2): 243-261.
- [113] 刘景良, 郑锦仰, 郑文婷, 等. 基于改进同步挤压小波变换识别信号瞬时频率[J]. *振动、测试与诊断*, 2017, 37(4): 814-821, 848. LIU Jingliang, ZHENG Jinyang, ZHENG Wenting, et al. Instantaneous frequency identification of signals based on improved synchrosqueezing wavelet transform [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2017, 37(4): 814-821, 848. (in Chinese)
- [114] OBERLIN T, MEIGNEN S, PERRIER V. The Fourier-based synchrosqueezing transform [C]// 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Florence, Italy: IEEE, 2014: 315-319.
- [115] YU G, YU M J, XU C Y. Synchroextracting transform [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(10): 8042-8054.
- [116] YU G, WANG Z H, ZHAO P. Multisynchrosqueezing transform [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 66(7): 5441-5455.
- [117] YU G, WANG Z H, ZHAO P, et al. Local maximum synchrosqueezing transform: an energy-concentrated time-frequency analysis tool [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 117: 537-552.
- [118] HUANG N E, SHEN Z, LONG S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis [J]. *Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1998, 454: 903-995.
- [119] WANG Z C, REN W X, CHEN G D. Time-varying linear and nonlinear structural identification with analytical mode decomposition and Hilbert transform [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2013, 139(12): 1562-1584.
- [120] DRAGOMIRETSKIY K, ZOSSO D. Variational mode decomposition [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(3): 531-544.
- [121] 聂少军, 汪运鹏. 基于时频变换的激波风洞天平信号分析与处理[J]. *力学学报*, 2022, 54(1): 232-243. NIE Shaojun, WANG Yunpeng. Signal analysis and processing of shock tunnel balance based on time-frequency transform [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(1): 232-243. (in Chinese)
- [122] 文娟, 刘伟雄, 高宏力, 等. 高超声速飞行器模型振动及传力特性研究[J]. *振动、测试与诊断*, 2015, 35(5): 961-967, 996. WEN Juan, LIU Weixiong, GAO Hongli, et al. Vibration and load transmission characteristics of hypersonic vehicle model [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2015, 35(5): 961-967, 996. (in Chinese)
- [123] WU Z H, HUANG N E. Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method [J]. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 2009, 1(1): 1-41.
- [124] LANG X, ZHENG Q, ZHANG Z M, et al. Fast multivariate empirical mode decomposition [J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 65521-65538.
- [125] SPIVEY N D. High-temperature modal survey of a hot-structure control surface [R]. USA: NASA, 2011.
- [126] 苏华昌, 鞠永博, 李增文, 等. 舵面热模态试验技术研究 [J]. *强度与环境*, 2011, 38(5): 18-24. SU Huachang, QIAN Yongbo, LI Zengwen, et al. The study of rudder thermo-modal test technique [J]. *Structure & Environment Engineering*, 2011, 38(5): 18-24. (in Chinese)
- [127] 杨文岐, 李晓东, 刘浩. 基于频率自动跟踪技术的热模态测试方法研究 [J]. *结构强度研究*, 2014(4): 1-5. YANG Wenqi, LI Xiaodong, LIU Hao. The study of thermo-modal test method based on frequency auto-tracking technique [J]. *Research of Structural Strength*, 2014(4): 1-5. (in Chinese)
- [128] SU L, ZHANG J Q, HUANG X, et al. Automatic operational modal analysis of structures based on image recognition of stabilization diagrams with uncertainty quantification [J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2021, 32(1): 335-357.
- [129] SU L, HUANG X, SONG M L, et al. Automatic identification of modal parameters for structures based on an uncertainty diagram and a convolutional neural network [J]. *Structures*, 2020, 28: 369-379.
- [130] KIM H, SIM S H. Automated peak picking using region-based convolutional neural network for operational modal analysis [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2019, 26(11): 24-36.
- [131] YANG R Y, SINGH S K, TAVAKKOLI M, et al. CNN-LSTM deep learning architecture for computer vision-based modal frequency detection [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 144: 106885.