

文章编号: 1674-8190(2024)06-051-15

能量有限元法研究进展及在飞行器高频振动响应预示中的应用

陈兆林^{1,2}, 杨智春^{1,2}

(1. 西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

(2. 强度与结构完整性全国重点实验室, 西安 710072)

摘要: 结构的高频振动问题严重影响飞行器的服役安全性、可靠性和舒适性, 高效准确地预示结构的高频振动响应具有重要的学术研究价值和工程实践意义。能量有限元法是近年来发展起来的一种高频振动响应预示新方法, 弥补了有限元法、统计能量法等传统方法在高频振动响应预示方面的不足。本文回顾了能量有限元法的研究进展, 阐述了能量有限元法的基本理论及其在工程领域的拓展和应用, 对能量有限元法在飞行器结构高频振动响应预示方面的研究工作进行了介绍, 并对能量有限元法未来的发展方向进行了展望。

关键词: 能量有限元法; 高频振动; 响应预示; 能量密度; 能量流

中图分类号: V214

文献标识码: A

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.2024.06.05

Study advances in energy finite element method and its application in predicting high-frequency vibration response of aircraft

CHEN Zhaolin^{1,2}, YANG Zhichun^{1,2}

(1. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. National Key Laboratory of Strength and Structural Integrity, Xi'an 710072, China)

Abstract: The high-frequency vibration problem of structures seriously affects the service safety, reliability and comfort of the aircraft. It is of great academic value and engineering significance to predict the high-frequency vibration response of structures efficiently and accurately. The energy finite element method (EFEM) is a new method developed in recent years to predict high-frequency vibration response. It overcomes the shortcomings of traditional methods such as the finite element method (FEM) and the statistical energy analysis (SEA) in predicting high-frequency vibration response. In this paper, the research progress of the energy finite element method in recent years is reviewed. The basic theory of the energy finite element method and its extension and application in engineering are elaborated. Studies of the energy finite element method in predicting the high-frequency vibration response of aircraft structures are introduced. In addition, the future directions of the energy finite element method are prospected.

Key words: energy finite element method; high-frequency vibration; response prediction; energy density; energy flow

收稿日期: 2024-04-14; 修回日期: 2024-05-27

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(12302228); 陕西省自然科学基金基础研究计划青年项目(2022JQ-070)

通信作者: 杨智春(1964-), 男, 博士, 教授。E-mail: yangzc@nwpu.edu.cn

引用格式: 陈兆林, 杨智春. 能量有限元法研究进展及在飞行器高频振动响应预示中的应用[J]. 航空工程进展, 2024, 15(6): 51-65.

CHEN Zhaolin, YANG Zhichun. Study advances in energy finite element method and its application in predicting high-frequency vibration response of aircraft[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2024, 15(6): 51-65. (in Chinese)

0 引言

振动问题广泛存在于航空航天、舰船、车辆等工程领域中。工程结构的振动不仅会影响结构自身的使用寿命,而且会影响这些结构上安装的设备的工作精度,甚至引起严重故障。另外,结构的振动及其产生的辐射噪声,还会影响运载工具内部乘员的舒适性,降低工作人员的工作能力。在相关工程结构的设计研发阶段,如果可以通过高效准确的分析方法预示结构的振动响应特性,便可以对结构的减振降噪设计提供指导信息,有助于结构设计方案的优化改进。因此,结构的振动响应预示对提升工程结构的服役安全性、可靠性和舒适性具有至关重要的作用。结构的高频振动响应预示作为振动响应预示的重要组成部分,一直是相关研究者和研究机构关注的重点和难点。例如,在航空领域中,高超声速飞行器表面的蒙皮壁板结构会受到气动噪声载荷的作用^[1-2]。气动噪声载荷不仅声压级高,而且频带宽,在1~10 kHz的高频段,声压级可超过150 dB^[3]。高频强噪声载荷会激起壁板的高频振动响应,影响飞行器的结构强度设计、疲劳寿命预测以及舱内噪声环境预示,使得壁板的高频振动响应预示成为高超声速飞行器研发过程中亟待解决的问题。在其他工程结构中,同样面临着高频振动问题,尤其是近年来,随着各种运载工具朝着轻量化、高速、高机动的方向发展,越来越多的轻质材料和薄壁结构被广泛应用于工程结构中,这使得结构的高频振动问题更加突出。

在现有的振动响应预示方法中,有限元法(Finite Element Method,简称FEM)最为成熟且应用广泛,但是对于高频振动响应预示问题,有限元法却存在局限性。结构在高频段的波长很小^[4],则其有限元模型需要划分非常细密的网格才能保证足够的计算精度,从而导致有限元模型的规模巨大,计算成本过高而失去实用性。而伽辽金法(Galerkin Method)、瑞利—里兹法(Rayleigh-Ritz Method)等半解析法在振动响应预示领域也有着广泛的应用,随着分析频率的升高,此类方法所需选取的试函数随之增多,因而在高频分析中也会面临巨大的计算量。由于计算效率的问题,上述以力和位移为基本变量的确定性方法均不适用于高频振动响应预示,为了解决这个问题,以振动能量为

基本变量的统计类方法被提出并受到广泛关注。统计能量分析(Statistical Energy Analysis,简称SEA)法是一种专门进行高频振动响应预示的方法^[5-6],该方法以结构子系统时间平均的总能量为基本研究变量,并从结构子系统的能量传递和耗散的角度来描述结构的动力学行为,在高频振动响应预示中具有模型规模小、计算效率高等优点。但统计能量法只能预示结构各子系统的总能量,不能获得振动能量在结构子系统内部的空间分布特征,无法进行更加精细的高频振动响应预示。

针对日益增长的高频振动响应预示需求,考虑到已有振动响应预示方法的不足,能量有限元法迅速发展起来。能量有限元法以能量密度和能量强度为基本变量,且通常要对能量密度和能量强度进行时间平均、局部空间平均和频段平均处理。其中,能量密度的局部空间平均是指对各点的能量密度在一个波长内进行平均。由于与结构几何尺寸相比,高频振动的波长通常很小,因此这种局部空间平均的做法虽然忽略了振动能量在空间的波动变化,但依然保留了振动能量在结构内部的整体分布趋势。与有限元法相比,能量有限元法所需的网格量少,计算量小,求解速度快;与统计能量法相比,能量有限元法可以预示高频振动响应在结构内部的空间分布情况,还可以考虑空间非均匀分布的载荷、阻尼等因素的影响。能量有限元法在高频振动响应预示中具有显著的优点,是目前解决高频振动响应预示问题的有力工具。

本文回顾近30年来能量有限元法的相关研究工作,总结能量有限元法的基本理论,阐述其在不同工程领域的应用和拓展,对能量有限元法在飞行器结构高频振动响应预示方面的研究进展进行介绍,并提出今后能量有限元法在相关领域值得进一步研究的问题。

1 能量有限元法的基本理论

1.1 简单结构的能量有限元法

能量有限元法以波动理论为基础,通过分析结构中弹性波能量的叠加、传递和耗散,建立能量密度控制方程来描述系统的高频振动状态。能量有限元法的基本假设为:研究对象为线弹性、小阻尼系统,处于稳态振动状态,忽略倏逝波,忽略行波之间的干涉作用^[7]。这些基本假设对能量密度

控制方程的推导具有关键作用,也使得能量有限元法在高频振动响应预示中具有非常高的求解效率,还影响着能量有限元法的分析精度和适用范围。

能量有限元法以时间平均和局部空间平均的能量密度和能量强度为研究变量,通过下述三个基本方程来描述结构的高频振动行为。

1) 能量平衡方程。描述结构微元之间传递的能量、内部耗散的能量和外激励输入给结构的能量的平衡关系如图1所示。

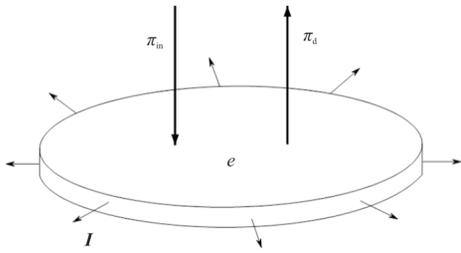


图1 能量平衡关系示意图^[8]

Fig. 1 Schematic diagram of the energy balance relationship^[8]

$$\nabla \cdot \langle I \rangle + \langle \pi_d \rangle = \langle \pi_m \rangle \quad (1)$$

式中: I 为能量强度; π_d 为耗散功率密度; π_m 为输入功率密度; $\langle \cdot \rangle$ 表示经过时间平均和局部空间平均处理的物理量。

2) 能量传递方程。描述结构微元之间传递的能量和微元内部存储的振动能量的关系:

$$\langle I \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla \langle e \rangle \quad (2)$$

式中: c_g 为弹性波的群速度; η 为阻尼损耗因子; ω 为圆频率; e 为能量密度。

3) 能量耗散方程。描述结构微元内部耗散的能量和存储的能量之间的关系,表征着阻尼对结构振动能量的耗散作用:

$$\langle \pi_d \rangle = \eta\omega \langle e \rangle \quad (3)$$

将上述三个基本方程进行联立,从而得到能量密度控制方程:

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle e \rangle + \eta\omega \langle e \rangle = \langle \pi_m \rangle \quad (4)$$

通过有限元法对上式进行离散,可得单元的能量有限元方程:

$$\mathbf{K}^e e^e = \mathbf{P}^e + \mathbf{Q}^e \quad (5)$$

式中: \mathbf{K}^e 为单元系数矩阵; e^e 为单元结点能量密度

向量; \mathbf{P}^e 为单元输入功率向量; \mathbf{Q}^e 为单元边界的能量强度向量。

将单元的能量有限元方程组装为结构总体的能量有限元方程并求解,即可获得能量密度和能量强度,以此来描述结构的高频振动响应特性。

除了有限元法,能量密度控制方程还可以通过诸如傅里叶变换法^[9-11]、傅里叶级数法^[12-16]、Levy法^[17-19]之类的解析法和半解析法进行求解。由于能量强度又称为能量流,因此,上述建立结构能量密度控制方程并求解获得能量密度和能量强度的方法,统称为能量流分析(Energy Flow Analysis,简称EFA)法。而采用有限元法离散并求解能量密度控制方程的方法,就是所谓的能量有限元法。一般而言,解析法和半解析法仅适用于较为简单的问题,而能量有限元法的适用性更加广泛,因此受到了更多的关注。

对能量有限元法的研究可以追溯到20世纪70年代,Belov等^[20-21]基于不同行波间能量可以叠加的假设,推导得到了形式上类似于热传导方程的能量密度控制方程;Nefske等^[22]提出时间平均能量强度正比于时间平均能量密度的梯度的假设,进而结合微元体的能量平衡关系和能量耗散关系,推导得到了梁结构的能量密度控制方程,并首次采用有限元法对方程进行离散和求解,建立了能量有限元法的基本框架;Wohlever等^[23-24]从杆的纵向振动和梁的弯曲振动方程出发,推导出能量密度和能量强度的表达式,证明了杆纵向振动的时间平均能量强度正比于时间平均能量密度的梯度,但是对于弯曲振动的梁,其能量密度和能量强度存在空间波动项,需要对时间平均的能量密度和能量强度在一个波长上进行局部的空间平均,才能推导得到能量强度正比于能量密度的梯度。从此,对能量密度和能量强度进行时间和局部空间平均,成为推导弯曲振动结构的能量密度控制方程中通用的处理方式。Bouthier等^[12-13,25-26]从薄膜、平板和声场的振动方程出发,采用时间和局部空间平均的能量密度和能量强度,推导出能量传递方程、能量平衡方程和能量耗散方程,并将这三个方程联立,获得了薄膜、平板和声场的能量密度控制方程。此外,Park等^[17]从各向同性板的内面内振动方程出发,推导得到面内纵波和剪切波

的能量密度和能量强度,建立了板结构中面内纵波和剪切波的能量密度控制方程;Yeo等^[27]从三维固体中弹性波的控制方程出发,推导得到了固体中膨胀波的时间和局部空间平均的能量密度和能量强度,建立了固体中膨胀波的能量密度控制方程,将能量有限元法推广应用于三维固体结构的高频振动响应预示;Navazi等^[28-29]提出了测量梁、板结构高频能量密度的实验方案,通过实验测试验证了能量有限元法的有效性。

上述研究工作建立了一维杆、梁结构,二维膜、板结构,以及三维固体结构和声场的能量有限元模型,奠定了能量有限元法的理论基础。

1.2 耦合结构的能量有限元法

上述研究主要针对单个简单结构,耦合结构(或者组合结构)的高频振动响应预示是能量有限元法研究领域的重点问题。对于多个子结构耦合的系统,子结构连接处的材料变化、尺寸变化、角度变化等因素均会引起弹性波能量的反射和透射,由此导致连接处能量密度的不连续。为了描述连接处能量强度和能量密度的关系,需要分析弹性波的能量反射和透射系数,并引入如下能量传递关系:

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \langle I \rangle_n^i \\ \langle I \rangle_n^j \\ \vdots \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \vdots \\ \langle e \rangle_n^i \\ \langle e \rangle_n^j \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式中: J 为能量耦合矩阵,由能量反射和透射系数组成;上标 i, j 分别为第 i, j 个子结构;下标 n 为第 n 个耦合结点。

将式(5)与式(6)进行组装,即可得到耦合结构的总体能量有限元方程:

$$(K + J)e = P + Q \quad (7)$$

Cho等^[30-31]基于对耦合结构的能量有限元法,根据弹性波理论,研究了杆、梁和板结构连接处的能量反射和透射系数,推导了连接处能量密度和能量强度之间的关系,建立了耦合杆、耦合梁和耦合板的能量有限元模型,成功将能量有限元法推广应用于耦合结构的高频振动响应预示。其中,在耦合梁结构的能量有限元模型中,考虑了纵波、扭转波和弯曲波在连接处的模式转换,系统地分

析了共线耦合梁、共面耦合梁和三维空间耦合梁的能量传递关系。Bitsie等^[32-33]详细地研究了板与声场之间的能量传递关系,建立了板—声场耦合系统的能量有限元模型和能量边界元模型,求解得到了板—声场耦合系统的高频振动响应和声辐射特性;Bernhard等^[34]总结了基于能量有限元法预示板—声场耦合系统的振动响应和声辐射特性的一般流程。在此基础上,首尔大学对耦合结构的能量有限元法开展了深入的研究;Song J H等^[35]研究了梁与板连接处的能量传递关系,建立了梁—板耦合结构的能量密度控制方程,其采用的梁—板耦合结构中,梁轴线与板所在平面是垂直相交的;Seo等^[19]推导了加筋板之间的能量传递关系,结合板结构的能量密度控制方程,采用Levy法求解了周期性加筋板的能量密度和能量强度;Kwon等^[36-37]采用能量有限元法和能量边界元法预示了加筋圆柱壳的中高频振动响应和声辐射特性,并与实验结果进行了对比,验证了能量有限元法的有效性。

在国内,关于能量有限元法在耦合结构中的应用也开展了大量、系统的研究。Niu J^[38-39]考虑了纵波、剪切波和弯曲波三种弹性波的模式转换,采用能量有限元法研究了L形板和n形板的高频振动响应;江民圣等^[40]研究了任意形状和任意连接角度板结构的能量有限元法;刘知辉等^[41-42]通过能量有限元法对封闭耦合结构的高频振动响应特性进行了研究,并将统计能量法中耦合损耗因子的概念引入到能量有限元法中,提高了能量有限元法对耦合结构高频振动响应预示的精度;此外,Lin Z等^[43]采用共线耦合梁的能量有限元模型,研究了变截面梁的高频振动响应特性;荣吉利等^[44]基于等效“板—梁—板”耦合模型,预示了非共面加筋板的高频振动响应;陈校锋等^[45]、蔡忠云等^[46]采用一阶剪切变形理论,建立了耦合层合梁的能量有限元模型,揭示了耦合角度对梁中能量传播特性的影响规律。

上述研究工作构建了能量有限元法的基本理论框架,使得能量有限元法能够适用于各种典型结构的高频振动响应预示,其一般的分析流程如图2所示。

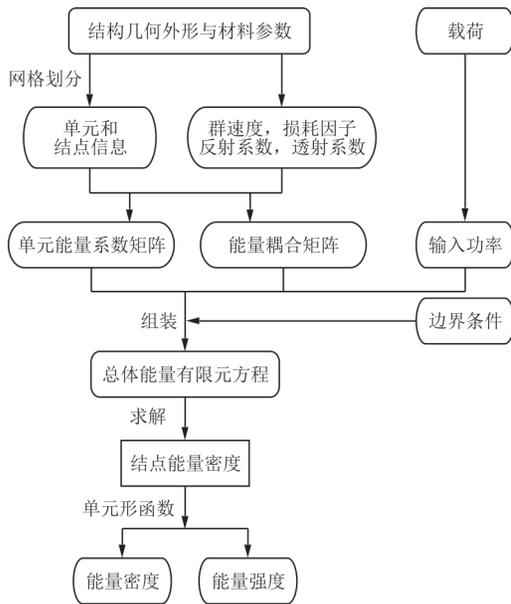


图 2 能量有限元法的分析流程图

Fig. 2 The flow chart of EFEM

2 能量有限元法的拓展和应用

能量有限元法的提出为结构高频振动响应预示开辟了新途径,但是在处理复杂的工程问题时,早期的能量有限元法仍存在局限性。为此,研究人员根据工程实践中面临的具体问题,对能量有限元法进行了拓展和改进,并成功将其应用于各种工程结构的高频振动响应预示。

2.1 能量有限元法的拓展与改进

在 Bernhard 等^[12-13,24-25]建立的杆、梁、板的能量有限元模型中,均没有考虑剪切变形等因素的影响,仅能适用于经典杆、Euler-Bernoulli 梁和 Kirchhoff 板;Han J B 等^[47]考虑了径向运动和剪切刚度的影响,建立了 Rayleigh-Love 杆和 Rayleigh-Bishop 杆的能量密度控制方程;Park 等^[48-51]考虑了转动惯量和剪切变形的影响,建立了 Timoshenko 梁和 Mindlin 板的能量密度控制方程,研究了耦合 Mindlin 板连接处的能量传递关系,建立了任意角度耦合 Mindlin 板的能量有限元模型。上述研究仅针对截面尺寸不变或阶跃变化的结构,Xie M 等^[52]考虑了截面尺寸的连续变化对梁中弯曲波传递特性的影响,建立了变厚度楔形梁的能量有限元模型,进一步完善了能量有限元法的理论体系。

近年来,复合材料在工程结构中的应用越来越广泛。与各向同性的金属材料不同,复合材料

会带来结构中不同方向弹性波不同的传播特性。为了将能量有限元法推广应用到复合材料结构的高频振动响应预示,Yan X^[53]以复合材料层合板为研究对象,基于平均波数的概念,推导了复合材料层合板的能量密度控制方程以及连接处的能量传递关系,建立了复合材料层合板的能量有限元模型;Lee 等^[54-56]在文献[53]工作的基础上,进一步完善了复合材料板的能量有限元法,并将其进行了工程应用;Park 等^[57-58]从正交各向异性板的弯曲振动方程出发,发现两个正交方向上的刚度不同,会导致弯曲波的群速度不同,进而建立了正交各向异性板的能量密度控制方程,并采用傅里叶级数法进行了求解;何理等^[59]在文献[57-58]工作的基础上,应用能量有限元法求解了正交各向异性板的能量密度控制方程;Liu Z 等^[60]考虑了材料属性在结构厚度方向的变化,研究了功能梯度梁结构的能量传递特性,建立了其能量有限元模型,并分析了材料组分变化对功能梯度梁高频振动响应特性的影响规律;Kim 等^[61-62]综合考虑了固体相和流体相的影响,建立了多孔介质的能量密度控制方程,并研究了多孔介质夹层板的高频振动响应特性;Xu P 等^[63]采用能量有限元法预示了耦合夹层板的高频振动响应,并研究了附加质量块对其振动特性的影响。

小阻尼是能量有限元法的一个基本假设,常规的能量传递方程和能量耗散方程都需要基于小阻尼假设才能成立,因此,能量有限元法无法适用于大阻尼系统。为了解决这个问题,Han J B 等^[64]推导了大阻尼情况下波数和群速度的表达式,量化了大阻尼导致的弹性波势能密度和动能密度的差异,建立了大阻尼结构的能量传递方程和能量耗散方程;孔祥杰等^[65-66]研究了附加自由阻尼梁的等效刚度和等效阻尼,采用能量有限元法分析了附加自由阻尼梁的高频振动响应;在此基础上,滕晓艳等^[67]考虑了附加自由阻尼引起的结构势能密度和动能密度的不等关系,进一步完善了大阻尼结构的能量有限元法。

二维板结构是能量有限元法的主要研究对象之一,Bouthier 等^[12,25]最初提出的板结构能量有限元模型是基于混响场平面波假设建立的,即结构中的波场为混响场,由多列平面波叠加而成。当板结构受分布载荷激励或者阻尼非常小时,该假

设可以近似成立。但当板结构受集中载荷激励且阻尼较大时,弹性波场将以直接场占主导,不再满足上述假设,此时,采用常规的能量有限元法预示的高频振动响应会表现出明显误差,在板结构的边界附近偏大,在激励点附近偏小^[68-71]。为了解决这一问题,Kong X等^[72]基于辐射能量传递法研究了能量有限元法的有效性判据,提出了采用无量纲正则衰减系数来判断混响场平面波假设是否成立;Smith^[73]分别推导了直接场和混响场的能量密度控制方程,建立了综合考虑直接场和混响场的混合能量有限元法,数值算例结果表明,该方法在直接场占优的情况下具有良好的预示精度;Liu Z等^[42]将耦合损耗因子引入混合能量有限元法中,提高了其预示耦合板结构高频振动响应的精度;Hardy等^[74]通过格林函数推导了直接场的能量密度和能量强度,进而结合混响场的能量有限元模型分析了板结构的高频振动响应。与集中载荷激励下的板结构类似,常规的能量有限元法在处理点声源激励下的声场时也会存在明显误差,Kim等^[75]同时考虑近场和远场声能量的影响,建立了点声源激励下声场的能量有限元模型,并通过与边界元法的结果对比,证明了该模型的准确性。

除了上述研究工作,研究人员在常规能量有限元法的基础上,还发展了零阶能量有限元法(EFEM)^[76-78]和能量谱单元法(ESEM)^[79-80]来提高能量有限元法的求解效率和精度,发展了能量边界元法(EBEM)^[82,81-83]来预示结构的高频辐射声场,发展了有限元-能量有限元混合法(FEM-EFEM)^[84-89]来解决刚-柔耦合结构的振动响应预示问题。上述研究促进了能量有限元法理论体系的完善,拓展了其适用范围。

2.2 复杂载荷环境中的能量有限元法

工程结构往往服役于各种各样的载荷环境,复杂的载荷环境给结构的高频振动响应预示带来了挑战。近年来,随着能量有限元法的发展,复杂载荷环境下的高频振动分析问题吸引了越来越多的关注。

为了分析随机载荷激励下结构的高频振动响应,Han F等^[14-15]考虑了随机载荷的空间相干性,提出了传递函数法和机械阻抗法来计算离散随机载荷和分布随机载荷对梁/板结构的输入功率,进而把这两种方法与能量有限元法相结合,成功将

能量有限元法推广应用到梁/板结构的高频随机振动响应预示;Han F等^[16,90-91]采用能量有限元法分析了气动噪声载荷作用下板结构的高频振动响应和声辐射特性;在此基础上,游进^[9]综合考虑了结构的横向弯曲振动和纵向振动,提出了随机能量流分析法,分析了二维框架梁^[92-93]、三维框架梁^[94]和L形耦合板^[95-97]在随机载荷激励下的高频振动响应特性。

为了分析热环境中结构的高频振动响应,张文博等^[11,98]考虑了热载荷在结构中产生的热应力以及热载荷对材料参数的影响,推导了热环境中梁/板结构的弯曲波波数、群速度和能量密度控制方程,建立了均匀温度场和非均匀温度场中板结构的能量有限元模型,分析了受热梁/板结构的高频振动响应;Wang D等^[99]考虑了受热板中弯曲波传播方向的影响,改进了受热板的能量有限元模型;刘知辉等^[100]考虑了厚度方向非均匀温度场的影响,采用能量有限元法预示了热梯度环境下梁结构的能量密度,并揭示了热应力和材料的温变特性对高频振动响应特性的影响机制。

为了分析流体中结构的高频振动响应,Zhang W等^[101-104]将液体对结构的作用等效为附加质量和辐射阻尼,从而推导了单面与液体接触的平板、圆柱壳和加筋板的能量密度控制方程,并考虑了液体对结构连接处能量透射和反射特性的影响,建立了单面与液体接触的板结构的能量有限元模型;Kong X等^[105]在文献[101-104]的基础上,综合考虑了直接场和混响场的影响,建立了与液体接触的平板结构的混合能量有限元模型,提高了高频振动响应预示精度;Han J B等^[18]对均匀流动的液体中的板结构进行了研究,通过推导板中弹性波的波数,发现流动液体会对板中顺流向传播的弹性波和逆流向传播的弹性波引入不同的附加质量和辐射阻尼,建立了以顺流向弹性波和逆流向弹性波的能量密度为变量的能量密度控制方程。此外,能量有限元法也被广泛应用于预示结构的声辐射特性^[10,32-34,36-37],在这些工作中,考虑了流场对结构附加的声辐射阻尼,还考虑了声场向结构传递的能量。

2.3 能量有限元法在工程中的应用

随着能量有限元法理论体系的日臻完善,能量有限元法已经成为一种高效的高频振动响应预

示方法,并在工程实践中得到了广泛的应用。

密歇根大学 Vlahopoulos 教授团队对能量有限元法的工程应用开展了一系列的研究,验证了能量有限元法的实用性^[106-107],基于传统的有限元法计算了点焊连接的平板结构之间的功率传递系数,并结合能量有限元法分析了点焊连接的 L 型板的高频振动响应;采用能量有限元法分析了渔船的高频振动响应,并通过与统计能量法的结果进行对比,证明了能量有限元法在高频振动响应预示中的优势。Borlase 等^[108]采用能量有限元法对渔船结构的阻尼分布进行了优化设计,从而降低了渔船结构的高频振动响应;Wu K 等^[109-112]通过能量有限元法分析了水面舰船缩比模型(如图 3 所示)的高频振动响应和声辐射特性,并通过与实验结果进行对比,验证了能量有限元解的准确性;Vlahopoulos 等^[113-115]基于能量有限元法和能量边界元法,分析了汽车的高频振动响应和车内外的噪声量级,如图 4 所示;此外,Kwon 等^[36]采用能量有限元法研究了水下舱段的高频振动特性,并通过实验测试进行了验证;Nokhbatolfoghahai 等^[116]采用能量有限元法分析了加筋开孔板的高频振动响应,其数值分析结果与实验测试结果吻合良好。

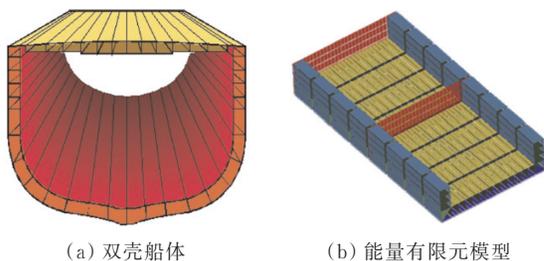


图 3 双壳船体示意图及其简化结构的能量有限元模型^[112]
Fig. 3 Schematic diagram of a double hull and its simplified structural energy finite element model^[112]

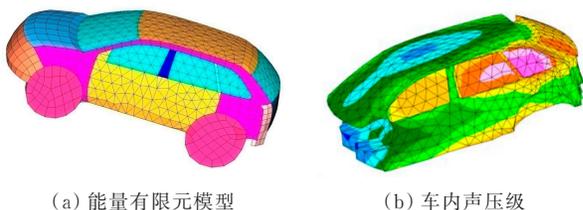


图 4 汽车的能量有限元模型及其内部噪声的预示结果^[115]
Fig. 4 Energy finite element model of an automotive vehicle and the predicted result of interior noise^[115]

在国内,Xie M 等^[117]总结了近年来能量有限元法在航空航天、舰船、车辆等领域的应用现状;郑旭等^[118-119]采用能量有限元法预示了高速列车的内部噪声,如图 5 所示,并通过比较不同激励源对内部噪声的能量贡献,制定了高速列车的降噪策略;孙丽萍等^[120-121]研究了能量有限元法在舰船结构高频振动响应预示中的应用;刘金帅^[122]采用能量有限元法对齿轮箱系统进行了建模,并根据振动能量的传递和分布特点,提出了齿轮箱系统的减振方案;刘宏磊等^[123]采用能量有限元法分析了盾构机刀盘的高频振动特性,并通过增强结构振动能量的耗散,实现对盾构机刀盘的振动抑制;尚保佑等^[124]分别采用能量有限元法和有限元法计算了充液管道的高频振动能量密度,并通过对比仿真结果验证了能量有限元法的有效性;王坤等^[125-127]考虑了杆、梁、板结构参数不确定性的影响,采用能量有限元法分析了随机结构的能量响应;张猛等^[128]以截面几何尺寸、密度、阻尼等参数随机变化的梁结构为研究对象,采用随机参数能量有限元法分析了其振动能量密度的均值和方差。

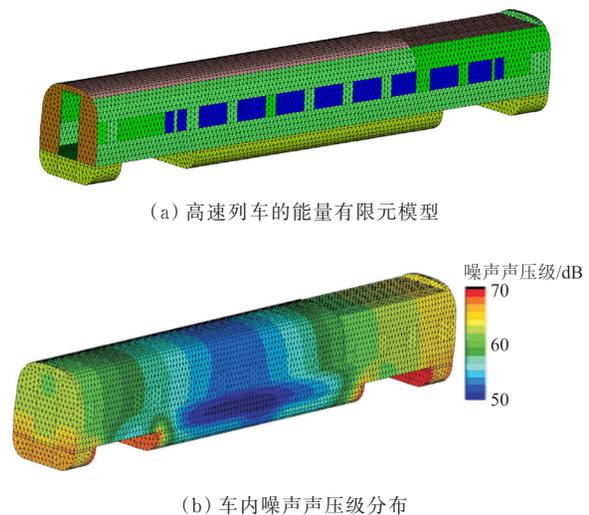


图 5 高速列车的能量有限元模型及内部噪声的预示结果^[118]
Fig. 5 Energy finite element model of a high-speed train and the predicted result of interior noise^[118]

除了上述高频振动响应和噪声环境预示问题,能量有限元法也被成功应用于结构的优化设计^[82,123,129-132]、损伤检测^[124,133-134]等领域,为解决相关问题提供了新的途径。

3 飞行器高频振动响应预示的能量有限元法

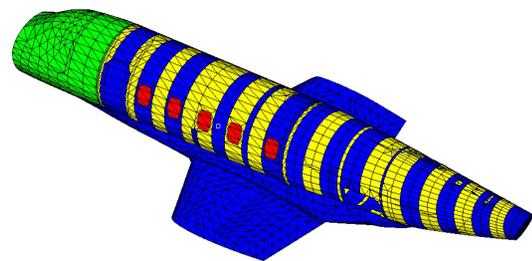
减振降噪是飞行器研制过程的重要任务。飞行器在服役过程中会受到气动噪声、发动机振动等高频激励源的作用,另外,高速、高机动、轻量化等设计思想促使飞行器越来越广泛地采用轻质材料和大型薄壁结构,这使得飞行器结构的高频振动问题更加突出。准确高效地预示结构的高频振动响应特性是进行飞行器结构减振降噪设计的前提。近年来,随着能量有限元法的迅速发展,基于能量有限元法的飞行器结构高频振动响应预示研究工作逐渐兴起。

飞行器在高速飞行时会受到严酷的气动加热作用,张文博等^[11,98]以受热梁和受热板为研究对象,考虑热应力和材料温变特性的影响,推导了梁、板结构的波速、群速度、阻抗和能量传递系数,建立了热环境下简单梁、板结构和耦合梁、板结构的能量有限元模型。虽然该模型没有考虑热致应力应变产生的弹性势能,但为热环境下结构的能量有限元法奠定了基础。随后,Wang D等^[99]以高超声速飞行器的受热板结构为研究对象,基于平面波假设推导了非均匀温度场中任意角度耦合板结构的能量密度控制方程和能量传递系数,改进了受热板的能量有限元模型。

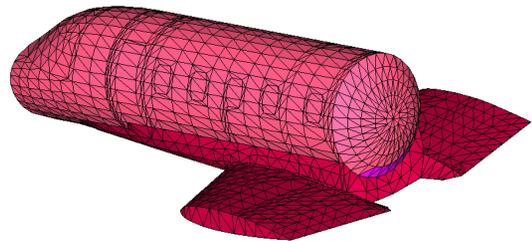
除了热载荷,超声速和高超声速飞行器表面的蒙皮壁板结构还会受到气动载荷和噪声载荷的作用^[135-136],壁板在复杂多场耦合载荷环境下的高频振动响应预示,是结构动力学领域的前沿课题。以热载荷、气动载荷和噪声载荷作用下的二维壁板为研究对象^[8,137-139],通过研究热致面内力、几何非线性面内力、气动载荷因素对壁板中弹性波传递特性的影响,引入面内应力应变产生的势能密度和气动载荷产生的附加阻尼,计算了噪声载荷对壁板的输入功率,建立了相应的能量有限元模型,分析获得了壁板的高频声振响应特性,揭示了面内力、气动载荷等因素对壁板高频声振响应的影响规律和影响机理,为多场耦合环境下结构的高频声振响应预示提供了新途径。

飞行器的噪声环境预示是能量有限元法在航空航天领域的一项重要应用。解妙霞等^[10,140-141]以飞行器仪器舱为研究对象,根据其结构形式的特

点,发展了圆柱壳体结构和复杂曲面壳体结构的能量有限元模型,采用能量有限元法分析了仪器舱的高频振动响应和内部声场特性,进而结合能量边界元法,计算了仪器舱的外部辐射噪声;De Lima等^[142-143]以某喷气式商务机为研究对象,如图6所示,采用能量有限元法预示了其高频振动响应和舱内声压级,通过与实验结果对比,验证了能量有限元法的有效性;王怀志等^[144-145]采用MSC.NASTRAN软件的能量有限元模块研究了航天器仪器舱与整流罩(如图7所示)的振动响应和内部声场,通过与统计能量法的仿真结果和实验测试结果进行对比,证明了能量有限元法在声振响应预示方面的正确性和优势,并总结了能量有限元法在航空航天领域的应用现状^[146]。



(a) 机身结构的能量有限元模型



(b) 内部声场的能量有限元模型

图6 公务机机身结构和内部声场的能量有限元模型^[143]

Fig. 6 Energy finite element models of the fuselage structure and the interior acoustic space of a business jet^[143]

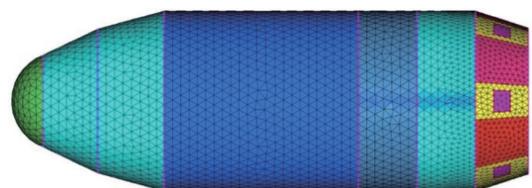


图7 双星整流罩的能量有限元模型^[144]

Fig. 7 Energy finite element model of a double stars fairing^[144]

此外,为了分析飞行器机身的高频振动响应, Lee等^[54-55]以轴向和环向加筋的复合材料圆柱壳

为研究对象,通过推导复合材料结构中的等效群速度、阻尼和能量传递系数,建立了复合材料加筋板的能量有限元模型。飞行器中广泛采用加筋壁板结构,为了预示这类刚柔耦合结构的振动响应,祝丹晖等^[88-89]采用传统有限元法分析刚性构件,采用能量有限元法分析柔性构件,通过推导刚性构件和柔性构件之间的相互作用力与能量传递关系,提出了有限元-能量有限元混合法,该方法适用于单点载荷、多点载荷和分布载荷作用下加筋壁板结构的振动响应预示。

4 结束语

经过近几十年的研究,能量有限元法已经发展为一种高效快捷的高频振动响应预示方法,并被广泛应用于航空航天、舰船、车辆、轨道交通等工程领域。针对能量有限元法有下述四个问题有待开展进一步的研究。

1) 基于能量有限元法的结构疲劳寿命估计。目前能量有限元法主要用于预示结构的能量密度分布,表征结构的高频振动响应。振动响应特性影响着结构的疲劳性能和寿命,基于传统有限元法和统计能量法进行振动响应预示和疲劳寿命估计的研究工作比较普遍,然而基于能量有限元法的结构疲劳寿命估计却鲜有报道。开展基于能量有限元法的结构疲劳寿命评估是一项有前景的研究工作,该问题需要建立能量密度分布与结构应力水平之间的对应关系,并开发与能量有限元法相匹配的频域疲劳寿命评估方法。

2) 能量有限元法的有效范围。除了少数大阻尼结构的能量有限元模型^[63-66],绝大多数能量有限元模型主要适用于小阻尼系统的高频振动响应预示,然而在实际应用中,小阻尼和高频并不是固定的数值,而是随着结构的质量、刚度和几何尺寸的变化而变化。目前已有研究工作提出了能量有限元法的有效范围^[32,71],但相关标准并不适用于普遍情况,因此没有获得广泛认可。建立严格的有效性判据,确定能量有限元法的有效范围,可避免能量有限元法的误用,确保高频振动响应预示结果的正确性,对于完善能量有限元法的理论体系具有重要意义。

3) 非线性系统的能量有限元模型。目前能量有限元模型仅适用于线性系统,然而几何非线性、

材料非线性等非线性因素在动力学问题中是普遍存在的。虽然已有研究工作尝试先对非线性动力学问题进行线性化处理,再采用能量有限元法进行分析^[139],但其本质上还是无法直接用能量有限元法求解非线性振动问题。非线性系统中弹性波的线性叠加原理不再适用,能量密度控制方程的推导将面临巨大挑战。如何合理描述非线性系统中弹性波能量的传播、存储和耗散,是建立非线性系统的能量有限元模型的关键。

4) 能量有限元分析软件的开发。目前密歇根大学、首尔大学、西安交通大学均开发了非公开的能量有限元分析软件,商业软件中MSC. NAS-TRAN也集成了能量有限元分析模块,但仅限于常规的能量有限元分析,适用范围比较局限。因此,目前仍缺少通用的能量有限元软件来集成现有的丰富的能量有限元理论,这给能量有限元法的工程应用造成了一定的困难。另外,开发一款与传统有限元分析软件可以良好交互的能量有限元分析软件,以实现低-中-高全频段振动响应预示,具有广阔应用前景。

参考文献

- [1] BLEVINS R, BOFILIOS D, HOLEHOUSE I, et al. Thermo-vibro-acoustic loads and fatigue of hypersonic flight vehicle structure: AFRL-RB-WP-TR-2009-3139 [R]. US: US Air Force Research Laboratory, 2009.
- [2] BEIER T H, HEATON P. High speed research program sonic fatigue summary report: NASA/CR-2005-213742 [R]. Hampton: Langley Research Center, 2005.
- [3] TZONG G, JACOBS R, LIGUORE S. Air vehicle integration and technology research (AVIATR) task order 0015: predictive capability for hypersonic structural response and life prediction: phase 1-identification of knowledge gaps, volume 1-nonproprietary version: AFRL-RB-WP-TR-2010-3068 [R]. US: US Air Force Research Laboratory, 2010.
- [4] BABUŠKA I, IHLENBURG F, STROUBOULIS T, et al. A posteriori error estimation for finite element solutions of Helmholtz' equation. part I: the quality of local indicators and estimators[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40(18): 3443-3462.
- [5] LYON R H. Statistical energy analysis of dynamical systems: theory and applications[M]. Cambridge: MIT Press, 1975.
- [6] 姚德源, 王其政. 统计能量分析原理及其应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1995.
YAO Deyuan, WANG Qizheng. Principles and applications of statistical energy analysis [M]. Beijing: Beijing Institute

- of Technology Press, 1995. (in Chinese)
- [7] ICHCHOU M, LEBOT A, JEZEQUEL L. Energy models of one-dimensional, multi-propagative systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 201(5): 535-554.
- [8] 陈兆林, 杨智春. 结构高频振动响应预示的能量有限元法 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2023.
CHEN Zhaolin, YANG Zhichun. Energy finite element method for predicting high-frequency vibration response of structures [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2023. (in Chinese)
- [9] 游进. 结构随机能量流分析研究 [D]. 上海: 上海交通大学, 2010.
YOU Jin. Study on structural random energy flow analysis [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2010. (in Chinese)
- [10] 解妙霞. 能量有限元方法在飞行器舱高频声振耦合问题中的应用研究 [D]. 西安: 西安交通大学, 2011.
XIE Miaoxia. Application of energy finite element analysis to high-frequency structural-acoustic coupling problem of an aircraft cabin [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2011. (in Chinese)
- [11] ZHANG W B, CHEN H L, ZHU D H, et al. The thermal effects on high-frequency vibration of beams using energy flow analysis [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(9): 2588-2600.
- [12] BOUTHIER O M, BERNHARD R J. Simple models of the energetics of transversely vibrating plates [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 182(1): 149-164.
- [13] BOUTHIER O M, BERNHARD R J. Simple models of energy flow in vibrating membranes [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 182(1): 129-147.
- [14] HAN F, BERNHARD R J, MONGEAU L G. Energy flow analysis of vibrating beams and plates for discrete random excitations [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 208(5): 841-859.
- [15] HAN F, MONGEAU L G, BERNHARD R J. Energy flow analysis of beams and plates for random distributed loading [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1998, 12(3): 315-333.
- [16] HAN F, BERNHARD R J, MONGEAU L G. Prediction of flow-induced structural vibration and sound radiation using energy flow analysis [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 227(4): 685-709.
- [17] PARK D H, HONG S Y, KIL H G, et al. Power flow models and analysis of in-plane waves in finite coupled thin plates [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 244(4): 651-668.
- [18] HAN J B, HONG S Y, SONG J H. Energy flow model for thin plate considering fluid loading with mean flow [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(24): 5326-5346.
- [19] SEO S H, HONG S Y, H G KIL. Power flow analysis of reinforced beam-plate coupled structures [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 259(5): 1109-1129.
- [20] BELOV V D, RYBACK S A. Applicability of the transport equation in the one-dimensional wave propagation problem [J]. *Journal of Soviet Physics Acoustics*, 1975, 21: 173-180.
- [21] BELOV V D, RYBACK S A, TARTAKOVSKII B D. Propagation of vibrational energy in absorbing structures [J]. *Journal of Soviet Physics Acoustics*, 1977, 23(2): 115-119.
- [22] NEFSKE D J, SUNG S H. Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and application to beams [J]. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 1989, 111(1): 94-100.
- [23] WOHLEVER J C. Vibrational power flow analysis of rods and beams [D]. West Lafayette: Purdue University, 1988.
- [24] WOHLEVER J C, BERNHARD R J. Mechanical energy flow models of rods and beams [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 153(1): 1-19.
- [25] BOUTHIER O M, BERNHARD R J. Models of space-averaged energetics of plates [J]. *AIAA Journal*, 1992, 30(3): 616-623.
- [26] BOUTHIER O M. Energetics of vibrating systems [D]. West Lafayette: Purdue University, 1992.
- [27] YEO S J, HONG S Y, SONG J H, et al. Vibrational energy flow models for dilatational wave in elastic solids [J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2017, 9(12): 1-9.
- [28] NAVAZI H M, NOKHBATOLFOGHAAEI A, GHOBAD Y, et al. Experimental measurement of energy density in a vibrating plate and comparison with energy finite element analysis [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 375: 289-307.
- [29] NOKHBATOLFOGHAAEI A, NAVAZI H M, GHOBAD Y, et al. Experimental measurement of energy density of a vibrating beam [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2016, 24(24): 5735-5746.
- [30] CHO P E. Energy flow analysis of coupled structures [D]. West Lafayette: Purdue University, 1993.
- [31] CHO P E, BERNHARD R J. Energy flow analysis of coupled beams [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 211(4): 593-605.
- [32] BITSIE F. The structural-acoustic energy finite-element method and energy boundary-element method [D]. West Lafayette: Purdue University, 1996.
- [33] BITSIE F, BERNHARD R J. Sensitivity calculations for structural-acoustic EFEM predictions [J]. *Noise Control Engineering Journal*, 1998, 46(3): 91-96.
- [34] BERNHARD R J, HUFF J E. Structural-acoustic design at high frequency using the energy finite element method [J]. *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the Asme*, 1999, 121(3): 295-301.
- [35] SONG J H, HONG S Y, KANG Y, et al. Vibrational energy flow analysis of penetration beam-plate coupled structures [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2011, 25(3): 567-576.

- [36] KWON H W, HONG S Y, OH D K, et al. Experimental study on the energy flow analysis of underwater vibration for the reinforced cylindrical structure[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2014, 28(9): 3405-3410.
- [37] KWON H W, HONG S Y, SONG J H. Development of a noise prediction software NASEFA and its application in medium-to-high frequency ranges[J]. *Advances in Engineering Software*, 2015, 83: 11-18.
- [38] NIU J, LI K. Energy flow finite element analysis of L-shaped plate including three types of waves[J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2013, 353/356: 3365-3368.
- [39] NIU J, LI K. Energy finite element analysis of n-shaped plate structures with three types of wave[J]. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2015, 3(5): 615-625.
- [40] 江民圣, 牛军川, 郑建华, 等. L型耦合板结构能量传递系数特性的研究[J]. *振动与冲击*, 2015, 34(17): 131-136. JIANG Minsheng, NIU Junchuan, ZHENG Jianhua, et al. Energy transfer coefficients' features of L-shaped coupled plates[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(17): 131-136. (in Chinese)
- [41] 刘知辉. 基于能量有限元方法的封闭耦合结构动力学特性研究[D]. 济南: 山东大学, 2017. LIU Zhihui. On dynamic analysis of the closed coupled structure based on the energy finite element analysis[D]. Jinan: Shandong University, 2017. (in Chinese)
- [42] LIU Z H, NIU J C, GAO X. An improved approach for analysis of coupled structures in energy finite element analysis using the coupling loss factor[J]. *Computers & Structures*, 2018, 210: 69-86.
- [43] LIN Z, CHEN X, ZHANG B. Application of the energy finite element analysis to vibration of beams with stepped thickness and variable cross-section[J]. *Journal of Vibroengineering*, 2018, 20(6): 2237-2252.
- [44] 荣吉利, 仇宇辰, 程修妍, 等. 非共面加筋结构能量有限元分析研究[J]. *北京理工大学学报*, 2023, 43(12): 1232-1239. RONG Jili, QIU Yuchen, CHENG Xiuyan, et al. Energy finite element analysis of non-coplanar stiffened structures[J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2023, 43(12): 1232-1239. (in Chinese)
- [45] 陈校锋, 朱翔, 李天匀, 等. 基于能量有限元法的耦合层合梁振动分析[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2023, 44(9): 1549-1556. CHEN Xiaofeng, ZHU Xiang, LI Tianyun, et al. Vibration analysis of coupled laminated beam based on energy finite element method[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2023, 44(9): 1549-1556. (in Chinese)
- [46] 蔡忠云, 唐文勇, 张圣坤. 能量有限元方法在复合材料层合梁耦合结构振动分析中的应用[J]. *振动与冲击*, 2010, 29(10): 23-27, 248. CAI Zhongyun, TANG Wenyong, ZHANG Shengkun. Application of energy finite element method in vibration analysis of coupled composite laminated beam structures[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2010, 29(10): 23-27, 248. (in Chinese)
- [47] HAN J B, HONG S Y, SONG J H, et al. Vibrational energy flow models for the Rayleigh-Love and Rayleigh-Bishop rods[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(2): 520-540.
- [48] PARK Y H, HONG S Y. Vibrational energy flow analysis of corrected flexural waves in Timoshenko beam: part I: theory of an energetic model[J]. *Shock and Vibration*, 2006, 13(3): 137-165.
- [49] PARK Y H, HONG S Y. Vibrational energy flow analysis of corrected flexural waves in Timoshenko beam: part II: Application to coupled Timoshenko beams[J]. *Shock and Vibration*, 2006, 13(3): 167-196.
- [50] PARK Y H, HONG S Y. Vibrational power flow models for transversely vibrating finite Mindlin plate[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 317(3/5): 800-840.
- [51] PARK Y H. Energy flow finite element analysis of general Mindlin plate structures coupled at arbitrary angles[J]. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, 2019, 11(1): 435-447.
- [52] XIE M, ZHANG P, ZHU M, et al. Energy flow analysis of high-frequency flexural vibration of wedge beam structures[J]. *Shock and Vibration*, 2022, 57: 2935655.
- [53] YAN X. Energy finite element analysis developments for high frequency vibration analysis of composite structures[D]. Michigan: University of Michigan, 2008.
- [54] LEE S M. Energy finite element method for high frequency vibration analysis of composite rotorcraft structures[D]. Michigan: University of Michigan, 2010.
- [55] VLAHOPOULOS N, SCHILLER N, LEE S. Energy finite element analysis developments for vibration analysis of composite aircraft structures[J]. *SAE International Journal of Aerospace*, 2011, 4(2): 593-601.
- [56] LEE S, VLAHOPOULOS N. Vibratory power transmission through coupled composite plates with joint compliance and damping[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2013, 21(10): 1902-1913.
- [57] PARK D H, HONG S Y, KIL H G. Vibrational energy flow models of finite orthotropic plates[J]. *Shock and Vibration*, 2003, 10(2): 97-113.
- [58] PARK D H, HONG S Y, KIL H G. Power flow model of flexural waves in finite orthotropic plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 264(1): 203-224.
- [59] 何理, 陈天宁, 陈琛. 正交异性薄板的振动能量传递特性[J]. *西安交通大学学报*, 2019, 53(3): 50-55. HE Li, CHEN Tianning, CHEN Chen. Transmission analysis of vibrational energy in orthotropic thin plates[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2019, 53(3): 50-55. (in Chinese)
- [60] LIU Z, NIU J. Vibrational energy flow model for functionally graded beams[J]. *Composite Structures*, 2018, 186: 17-28.

- [61] KIM H Y, KANG Y J. Energy flow analysis of equivalent fluid models for porous media[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2021, 150(4): 2782-2797.
- [62] KIM H Y, KANG Y J. Energy flow analysis of poroelastic media [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2022, 538: 117236.
- [63] XU P, LIU T, PAN S, et al. Numerical analysis for micro-vibration isolation of jointed sandwich plates with mass blocks [J]. *Materials Today Communications*, 2018, 17: 341-354.
- [64] HAN J B, HONG S Y, SONG J H, et al. Vibrational energy flow models for the 1-D high damping system[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2013, 27(9): 2659-2671.
- [65] 孔祥杰, 陈花玲, 祝丹晖, 等. 附加自由阻尼梁高频响应的能量有限元方法模型[J]. *振动与冲击*, 2015, 34(17): 94-99, 130.
KONG Xiangjie, CHEN Hualing, ZHU Danhui, et al. Energy finite element analysis for high-frequency vibration of beams with free-layer damping treatment[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(17): 94-99, 130. (in Chinese)
- [66] 孔祥杰. 大阻尼特性下结构高频响应预示的能量有限元方法研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2014.
KONG Xiangjie. Energy finite element analysis developments for highfrequency vibration analysis of structures with high damping characteristics [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2014. (in Chinese)
- [67] 滕晓艳, 丰国宝, 江旭东, 等. 自由阻尼梁高频能量流响应的解析模型[J]. *航空学报*, 2019, 40(4): 220-228.
TENG Xiaoyan, FENG Guobao, JIANG Xudong, et al. Analytical model of high-frequency energy flow response for a beam with free layer damping[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2019, 40(4): 220-228. (in Chinese)
- [68] LANGLEY R S. On the vibrational conductivity approach to high-frequency dynamics for 2-dimensional structural components[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 182(4): 637-657.
- [69] ICHCHOU M N, JEZEQUEL L. Comments on simple models of the energy flow in vibrating membranes and on simple models of the energetics of transversely vibrating plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 195(4): 679-685.
- [70] LEBOT A. Geometric diffusion of vibrational energy and comparison with the vibrational conductivity approach [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 212(4): 637-647.
- [71] LEBOT A. Comparison of vibrational conductivity and radiative energy transfer methods[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 283(1/2): 135-151.
- [72] KONG X, CHEN H, ZHU D, et al. Study on the validity region of energy finite element analysis[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(9): 2601-2616.
- [73] SMITH M J. A hybrid energy method for predicting high frequency vibrational response of point-loaded plates [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 202(3): 375-394.
- [74] HARDY P, ICHCHOU M, JÉZÉQUEL L, et al. A hybrid local energy formulation for plates mid-frequency flexural vibrations[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2009, 28(1): 121-130.
- [75] KIM J D, HONG S Y, WKWON H, et al. Energy flow model considering near field energy for predictions of acoustic energy in low damping medium[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330(2): 271-286.
- [76] WANG S. Theory and applications of a simplified energy finite element method and its similarity to SEA [J]. *Noise Control Engineering Journal*, 2002, 50(2): 63-72.
- [77] WANG S, BERNHARD R J. Prediction of averaged energy for moderately damped systems with strong coupling[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 319(1/2): 426-444.
- [78] 周红卫, 陈海波, 王用岩. 耦合板结构的非结构零阶能量有限元分析[J]. *振动与冲击*, 2015, 34(13): 140-145.
ZHOU Hongwei, CHEN Haibo, WANG Yongyan. Unstructured zero-order energy finite element method for coupled plate structures [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(13): 140-145. (in Chinese)
- [79] SANTOS E R O, ARRUDA J R F, DOS SANTOS J M C. Modeling of coupled structural systems by an energy spectral element method [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 316(1/5): 1-24.
- [80] PEREIRA V S, DOS SANTOS J M C. Coupled plate energy models at mid- and high-frequency vibrations[J]. *Computers & Structures*, 2014, 134: 48-61.
- [81] WANG A, VLAHOPOULOS N, WU K. Development of an energy boundary element formulation for computing high-frequency sound radiation from incoherent intensity boundary conditions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 278(1/2): 413-436.
- [82] DONG J, CHOI K K, VLAHOPOULOS N, et al. Sensitivity analysis and optimization using energy finite element and boundary element methods[J]. *AIAA Journal*, 2007, 45(6): 1187-1198.
- [83] XIE M, LI Y, CHEN H. Prediction of high-frequency vibro-acoustic coupling in anechoic chamber using energy finite element method and energy boundary element method [J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2012, 85(1): 65-78.
- [84] VLAHOPOULOS N, ZHAO X. Basic development of hybrid finite element method for midfrequency structural vibrations[J]. *AIAA Journal*, 1999, 37(11): 1495-1505.
- [85] VLAHOPOULOS N, ZHAO X. An investigation of power flow in the mid-frequency range for systems of co-linear beams based on a hybrid finite element formulation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 242(3): 445-473.
- [86] ZHAO X, VLAHOPOULOS N. A hybrid finite element formulation for mid-frequency analysis of systems with excitation applied on short members[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 237(2): 181-202.

- [87] ZHAO X, VLAHOPOULOS N. A basic hybrid finite element formulation for mid-frequency analysis of beams connected at an arbitrary angle[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 269(1/2): 135-164.
- [88] ZHU D, CHEN H, KONG X, et al. A hybrid finite element-energy finite element method for mid-frequency vibrations of built-up structures under multi-distributed loadings [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(22): 5723-5745.
- [89] 祝丹晖. 复杂结构中频振动响应预示的有限元-能量有限元混合方法研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2014.
ZHU Danhui. A hybrid finite element-energy finite element method for vibration prediction of complex structural systems in mid-frequency [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2014. (in Chinese)
- [90] HAN F. Prediction of flow-induced sound and vibration using the energy flow analysis method [D]. West Lafayette: Purdue University, 1999.
- [91] HAN F, MONGEAU L G, BERNHARD R J. A model for the vibro-acoustic response of plates excited by complex flows [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 246(5): 901-926.
- [92] 游进, 孟光, 李鸿光, 等. 随机激励下框架梁结构能量有限元分析[J]. *上海交通大学学报*, 2009, 43(10): 1632-1635.
YOU Jin, MENG Guang, LI Hongguang, et al. Energy finite element analysis of framed structure under random excitations [J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2009, 43(10): 1632-1635. (in Chinese)
- [93] YOU J, MENG G, LI H G. Random energy flow analysis of coupled beam structures and its correlation with SEA [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2009, 81(1): 37-50.
- [94] 游进, 孟光, 李鸿光. 三维框架结构随机能量流分析[J]. *上海交通大学学报*, 2010, 44(8): 1150-1154, 1158.
YOU Jin, MENG Guang, LI Hongguang. Random energy flow analysis of three-dimensional frame structure [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2010, 44(8): 1150-1154, 1158. (in Chinese)
- [95] 游进, 李鸿光, 孟光. 耦合板结构随机能量有限元分析 [J]. *振动与冲击*, 2009, 28(11): 43-46, 202.
YOU Jin, LI Hongguang, MENG Guang. Random energy finite element analysis of coupled plate structures [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(11): 43-46, 202. (in Chinese)
- [96] 游进, 孟光, 李鸿光. L型耦合板相关激励下高频随机能量流分析[J]. *振动工程学报*, 2010, 23(1): 60-63.
YOU Jin, MENG Guang, LI Hongguang. High frequency random energy flow analysis of L-shaped coupled plates under coherent excitations [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2010, 23(1): 60-63. (in Chinese)
- [97] 游进, 侯向阳. 板结构声振响应随机能量流分析的试验验证[J]. *振动与冲击*, 2018, 37(8): 82-86.
YOU Jin, HOU Xiangyang. Experimental validation of random energy flow analysis of vibro-acoustic response for plate structures [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(8): 82-86. (in Chinese)
- [98] 张文博. 热环境下结构高频声振响应预示的能量有限元方法研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2014.
ZHANG Wenbo. Energy finite element analysis for high frequency vibration and acoustic analysis of structures in a thermal environment [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2014. (in Chinese)
- [99] WANG D, XIE M X, LI Y M. High-frequency dynamic analysis of plates in thermal environments based on energy finite element method [J]. *Shock and Vibration*, 2015(5): 157208.
- [100] 刘知辉, 牛军川, 贾睿昊. 热梯度环境下梁高频振动的能量流模型[J]. *航空学报*, 2022, 43(5): 592-602.
LIU Zhihui, NIU Junchuan, JIA Ruihao. Energy flow model for high-frequency vibration of beams in thermal-gradient environment [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2022, 43(5): 592-602. (in Chinese)
- [101] ZHANG W, WANG A, VLAHOPOULOS N, et al. High-frequency vibration analysis of thin elastic plates under heavy fluid loading by an energy finite element formulation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 263(1): 21-46.
- [102] ZHANG W, VLAHOPOULOS N, WU K. An energy finite element formulation for high-frequency vibration analysis of externally fluid-loaded cylindrical shells with periodic circumferential stiffeners subjected to axis-symmetric excitation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 282(3/5): 679-700.
- [103] ZHANG W, WANG A, VLAHOPOULOS N, et al. A vibration analysis of stiffened plates under heavy fluid loading by an energy finite element analysis formulation [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2005, 41(11/12): 1056-1078.
- [104] ZHANG W, VLAHOPOULOS N. An energy finite element formulation for high-frequency vibration analysis of plate structures subjected to heavy fluid loading [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2001, 109: 2353-2353.
- [105] KONG X, CHEN H, ZHU D, et al. A hybrid energy model for predicting high frequency vibrational response of thin plates under heavy fluid loading [C]// ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, San Diego, California: ASME, 2013: 1-11.
- [106] VLAHOPOULOS N, ZHAO X, ALLEN T. An approach for evaluating power transfer coefficients for spot-welded joints in an energy finite element formulation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 220(1): 135-154.
- [107] VLAHOPOULOS N, GARZA-RIOS L O, MOLLO C. Numerical implementation, validation, and marine applications of an energy finite element formulation [J]. *Journal of Ship Research*, 1999, 43(3): 143-156.
- [108] BORLASE G A, VLAHOPOULOS N. An energy finite

- element optimization process for reducing high-frequency vibration in large-scale structures[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2000, 36(1): 51-67.
- [109] WU K, VLAHOPOULOS N. Vibratory response of surface ships predicted by energy finite element approach[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2004, 116(4): 2569.
- [110] WU K, VLAHOPOULOS N. Numerical investigation of small-scale surface ships by energy finite-element analysis[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2006, 119(5): 3297.
- [111] VLAHOPOULOS N, WU K. Energy finite element analysis of naval vehicles[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2010, 127(3): 1850.
- [112] VLAHOPOULOS N, WU K, MEDYANIK S. Energy finite element analysis for structural-acoustic design of naval vehicles[J]. *Journal of Ship Production and Design*, 2012, 28(1): 42-48.
- [113] VLAHOPOULOS N, ZHANG G, HE J. Combining an energy boundary element with an energy finite element analysis for airborne noise simulations[C]// *SAE 2007 Noise and Vibration Conference and Exhibition*. Illinois: SAE International, 2007: 1-8.
- [114] VLAHOPOULOS N, ZHANG G, BROPHY W, et al. Vehicle airborne noise analysis using the energy finite element method[C]// *SAE 2013 Noise and Vibration Conference and Exhibition*. Michigan: SAE International, 2013: 1-9.
- [115] WANG A, VLAHOPOULOS N. Vehicle NVH analysis using EFEA & EBFA methods[J]. *SAE International Journal of Passenger Cars-Mechanical Systems*, 2009, 2(1): 814-821.
- [116] NOKHBATOLFOGHAI A, NAVAZI H M, HADADPOUR H. High-frequency random vibrations of a stiffened plate with a cutout using energy finite element and experimental methods[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2020, 234(16): 3297-3317.
- [117] XIE M, YAO F, LI L, et al. Research status and development trend of energy finite element analysis: a review[J]. *Journal of Vibroengineering*, 2023, 25(2): 247-268.
- [118] ZHENG X, DAI W, QIU Y, et al. Prediction and energy contribution analysis of interior noise in a high-speed train based on modified energy finite element analysis[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 126: 439-457.
- [119] 代文强, 郑旭, 郝志勇, 等. 采用能量有限元分析的高速列车车内噪声预测[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2019, 53(12): 2396-2403.
- DAI Wenqiang, ZHENG Xu, HAO Zhiyong, et al. Prediction of high-speed train interior noise using energy finite element analysis[J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2019, 53(12): 2396-2403. (in Chinese)
- [120] 孙丽萍, 聂武. 船舶结构振动噪声分析及其进展[J]. *船舶力学*, 2003, 7(1): 116-121.
- SUN Liping, NIE Wu. Development of methods in analyzing ship structure vibration noise[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2003, 7(1): 116-121. (in Chinese)
- [121] 孙丽萍, 聂武. 能量有限元法在船舶结构中的应用[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2008, 40(9): 1491-1494.
- SUN Liping, NIE Wu. Application of energy finite element method in ship structures[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2008, 40(9): 1491-1494. (in Chinese)
- [122] 刘金帅. 基于能量有限元的齿轮箱系统建模与振动控制研究[D]. 济南: 山东大学, 2014.
- LIU Jinshuai. Research on model and vibration control of gearbox system based on energy flow element method[D]. Jinan: Shandong University, 2014. (in Chinese)
- [123] 刘宏磊, 宋晨旭, 鲁睿, 等. 能量视角下的盾构机刀盘的结构变异重构设计[J]. *西安交通大学学报*, 2023, 57(9): 109-122.
- LIU Honglei, SONG Chenxu, LU Rui, et al. Structural variation and reconstruction design of tunnel boring machine cutterhead from the view of energy[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2023, 57(9): 109-122. (in Chinese)
- [124] 尚保佑, 朱翔, 李天匀, 等. 基于能量有限元法的损伤充液管道振动分析[J]. *振动与冲击*, 2019, 38(21): 31-36.
- SHANG Baoyou, ZHU Xiang, LI Tianyun, et al. Vibration analysis of a damaged fluid-filled pipeline based on energy finite element method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(21): 31-36. (in Chinese)
- [125] WANG K, ZHAO Y. Energy density prediction of random structures using perturbation method[J]. *Applied Mechanics & Materials*, 2013, 27: 877-882.
- [126] WANG K, FU Y, LIU J, et al. Energy flow analysis of one-dimensional structures with random properties[J]. *Shock and Vibration*, 2020(3): 1-12.
- [127] 赵阳, 王坤. 复杂结构振动响应预示的能量方法[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2012, 44(9): 25-28.
- ZHAO Yang, WANG Kun. Vibration response prediction for the complex structures using energy method[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2012, 44(9): 25-28. (in Chinese)
- [128] 张猛, 陈花玲, 祝丹晖, 等. 高频弯曲振动梁的随机参数能量有限元分析[J]. *西安交通大学学报*, 2013, 47(11): 76-80.
- ZHANG Meng, CHEN Hualing, ZHU Danhui, et al. Stochastic parameter energy finite element analysis for high-frequency flexural vibration beam[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2013, 47(11): 76-80. (in Chinese)
- [129] DONG J, CHOI K K, WANG A, et al. Parametric design sensitivity analysis of high-frequency structural-acoustic problems using energy finite element method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 62(1): 83-121.
- [130] KIM N H, DONG J, CHOI K K. Energy flow analysis and

- design sensitivity of structural problems at high frequencies [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 269(1/2): 213-250.
- [131] 解妙霞, 朱明辉, 姚飞龙, 等. 基于能量有限元的薄板结构多目标拓扑优化[J]. *应用力学学报*, 2024(6): 1-11.
XIE Miaoxia, ZHU Minghui, YAO Feilong, et al. Multi-objective topology optimization of thin-plates based on energy finite element analysis [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2024(6): 1-11. (in Chinese)
- [132] LIU H, ZHANG Z, LI B, et al. Topology optimization of high frequency vibration problems using the EFEM-based approach[J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, 160: 107324.
- [133] SANTOS E R O, PEREIRA V S, ARRUDA J R F, et al. Structural damage detection using energy flow models [J]. *Shock and Vibration*, 2008, 15(3/4): 217-230.
- [134] 王迪, 朱翔, 李天匀, 等. 基于能量有限元法的损伤板结构振动分析[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(11): 73-78.
WANG Di, ZHU Xiang, LI Tianyun, et al. Vibration analysis of damaged plates based on energy finite element method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(11): 73-78. (in Chinese)
- [135] 陈浩宇, 王彬文, 宋巧治, 等. 高超声速飞行器热颤振研究现状与展望[J]. *航空工程进展*, 2022, 13(1): 19-27.
CHEN Haoyu, WANG Binwen, SONG Qiaozhi, et al. Research progress and prospect of thermal flutter of hypersonic vehicles[J]. *Advances in Aeronautical Science and Engineering*, 2022, 13(1): 19-27. (in Chinese)
- [136] 苏冯念, 钟萍, 曾慧, 等. 低声爆超声速飞机气动布局技术研究进展[J]. *航空工程进展*, 2023, 14(4): 18-30.
SU Fengnian, ZHONG Ping, ZENG Hui, et al. Research progress of aerodynamic configuration technology of low sonic boom supersonic aircraft [J]. *Advances in Aeronautical Science and Engineering*, 2023, 14(4): 18-30. (in Chinese)
- [137] CHEN Z, YANG Z, GUO N, et al. An energy finite element method for high frequency vibration analysis of beams with axial force [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 61: 521-539.
- [138] CHEN Z, YANG Z, GU Y, et al. An energy flow model for high-frequency vibration analysis of two-dimensional panels in supersonic airflow [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 76: 495-512.
- [139] CHEN Z, YANG Z, GU Y, et al. High-frequency vibration analysis of panels under aerothermoelastic effects in supersonic airflow by an energy finite element method [J]. *Thin-Walled Structures*, 2024, 200: 111885.
- [140] 解妙霞, 陈花玲, 吴九汇. 圆柱壳高频弯曲振动的能量有限元分析[J]. *西安交通大学学报*, 2008, 42(9): 1113-1116.
XIE Miaoxia, CHEN Hualing, WU Jiuhui. Energy finite element analysis to high-frequency bending vibration in cylindrical shell [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2008, 42(9): 1113-1116. (in Chinese)
- [141] XIE M X, CHEN H L, WU J H, et al. Application of energy finite element method to high-frequency structural-acoustic coupling of an aircraft cabin with truncated conical shape [J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2010(1): 1-21.
- [142] De LIMA W J, WANG A, VLAHOPOULOS N. Application of energy finite elements in the prediction of the vibro-acoustic ground response of business jet [C] // INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference. Dearborn, Michigan: Institute of Noise Control Engineering, 2008: 1-9.
- [143] De LIMA W J, VLAHOPOULOS N, SBRAGIO R, et al. Interior aircraft noise computations due to tbl excitation using the energy finite element analysis [C] // SAE 2009 Noise and Vibration Conference and Exhibition. Illinois: SAE International, 2009: 1-8.
- [144] 王怀志, 于开平, 曾耀祥, 等. 能量有限元方法的双星整流罩中频声振环境预示[J]. *宇航总体技术*, 2018, 2(5): 42-49.
WANG Huaizhi, YU Kaiping, ZENG Yaoxiang, et al. Prediction for vibration environment of the double stars fairing structure based on energy finite element [J]. *Astronautical Systems Engineering Technology*, 2018, 2(5): 42-49. (in Chinese)
- [145] 王怀志, 于开平, 张宗强, 等. 仪器舱结构的能量有限元中频声振环境预示[J]. *振动与冲击*, 2019, 38(10): 143-148.
WANG Huaizhi, YU Kaiping, ZHANG Zongqiang, et al. Prediction of the acoustic-vibration environment of an instrument cabin by using the energy finite element method [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(10): 143-148. (in Chinese)
- [146] 于开平, 王怀志. 能量有限元方法研究进展及其非平面波情况下的改进[J]. *强度与环境*, 2023, 50(6): 61-69.
YU Kaiping, WANG Huaizhi. Research progress of the energy finite element method and an improvement for non-plane wave [J]. *Structure & Environment Engineering*, 2023, 50(6): 61-69. (in Chinese)

(编辑:丛艳娟)