

小子样疲劳试验数据的特征寿命估算方法评估

兑红娜, 孙秦

(西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

摘要: 疲劳试验数据一般属小子样范畴,在 Weibull 寿命分布的假设下应考虑特征寿命的统计置信度。总结特征寿命概率估计的贝叶斯法和虚拟增广样本的 Bootstrap 法,通过 2024-T3 直耳片的七组疲劳试验数据对二者进行对比和评估。针对 EDF 拟合检验法无法对特征寿命估计值的合理性提供实质性指导的问题,提出一种新的试验样本数据全部落入寿命分布 $(1-\alpha)$ 双侧百分位区间的判定方法。结果表明:Bootstrap 法的特征寿命估计值比贝叶斯法偏大;本文提出的判定方法可有效定性判断特征寿命估计值偏大或偏小。

关键词: 小子样; Weibull; 特征寿命; 贝叶斯法; 虚拟增广样本; Bootstrap 法; EDF

中图分类号: U467.4⁺97

文献标识码: A

Evaluation of Characteristic Life's Estimation Methods for Small Sample Fatigue Test Data

Dui Hongna, Sun Qin

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The number of fatigue test data is generally small, thus under the assumption of Weibull distribution, the statistical confidence of characteristic life should be taken into consideration. Probability estimation methods of characteristic life are summarized, such as Bayesian method and Bootstrap method of virtually expanded sample. Then seven groups of fatigue test data for straight lugs are applied for comparison of these methods. Because EDF fitting methods can't offer substantial guidance to the rationality of characteristic life's estimations, a new method is proposed that all the test data should fall into $(1-\alpha)$ percentile interval of the life distribution. Through comparison and analysis, it can be concluded that estimations by Bayesian method are smaller than that of Bootstrap method, and the proposed statistical method is effective qualitatively to judge how about the estimation of characteristic life.

Key words: small sample; Weibull; characteristic life; Bayesian method; virtually expanded sample; Bootstrap method; EDF

0 引言

工程实践中,由于时间和成本的限制,疲劳试验的样本容量一般较少(<10),属于小子样统计范畴,应考虑统计置信度的问题^[1]。常见做法为利用已有的疲劳试验数据,求解出一定置信度 c 和可靠度 R 下的寿命 $N_{c/R}$,工程上通常取 $R=c=0.95$ 。

在疲劳可靠性分析和寿命检验中,二参数 Weibull 分布是应用较为广泛的寿命模型^[2],其概率密度函数(PDF)和分布函数(CDF)分别为

$$f(N) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{N}{\beta}\right)^{\alpha-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{N}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad (1)$$

$$F(N) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{N}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad (2)$$

式中: α 为形状参数; β 为尺度参数,也称特征寿命。

由于根据小子样试验数据获得的样本形状参数可能与母体值相差甚远,工程中常将形状参数 α 取为母体分布的经验值,特征寿命 β 可根据试验样

本数据利用概率统计方法估算。关于形状参数的经验值,基于大量疲劳试验,铝合金取为4.0,钛合金取为3.0,中强钢取为3.0,高强钢取为2.2^[3]。

由式(2)可知,具有置信度 c 和可靠度 R 的寿命 $N_{c/R}$ 为

$$N_{c/R} = \frac{\beta_c}{(-\ln R)^{-1/\alpha}} = \frac{\beta_c}{S_R} \quad (3)$$

式中: β_c 为置信度为 c 的特征寿命; R 为可靠度; S_R 为可靠性系数。

从式(3)可以看出,获得 $N_{c/R}$ 的关键在于如何求得置信度 c 下的特征寿命 β_c 。

为提高特征寿命 β_c 估计的置信性,本文采用三种统计方法对 β_c 值进行计算分析,并提出一种可直观定性判断估计参数优劣的统计方法。

1 特征寿命的估计方法

对于小子样疲劳试验数据的特征寿命估算,最常用的方法是极大似然法^[4]。但由于该法属经典统计学范畴,利用其获得的特征寿命是一个确定的值,不存在置信度这一概念,所以必须采用假定特征寿命服从某种概率分布的估计方法,较为常见的有贝叶斯法^[5-6]和虚拟增广样本的 Bootstrap 法^[7-9]。其中,贝叶斯法又可分为无信息 Jeffery 先验法和共轭先验法,前者是工程中求解 Weibull 分布下置信度为 c 的特征寿命的常用方法。下文将对这几种估计方法逐一进行阐述和评估。

1.1 贝叶斯法

贝叶斯公式通常具有以下形式

$$\pi(\theta | x) = \frac{L(x | \theta) \cdot \pi(\theta)}{\int L(x | \theta) \cdot \pi(\theta) d\theta} \quad (4)$$

式中: $L(x | \theta)$ 为样本的似然函数; $\pi(\theta)$ 为参数 θ 的先验分布函数。

常用的参数先验分布的选取方法有两种:无信息 Jeffery 先验和共轭先验。若 $N \sim W(\alpha, \beta)$, 则 $N^\alpha \sim \exp(\theta)$, 其中 $\theta = \beta^{-\alpha}$ 。这样,当形状参数 α 给定时,未知参数 β 的统计推断可转化为较为简单的指数分布参数 θ 的统计推断。 θ 的 Jeffery 先验分布 $\pi(\theta) = 1/\theta$, 共轭先验分布 $\pi(\theta) = \text{Gamma}(a, \lambda)$, a 和 λ 称为超参数。

现假设有小子样试验数据 $(x_1, x_2, \dots, x_m) = (N_1^c, N_2^c, \dots, N_m^c)$, 样本数为 m 。

(1) 无信息 Jeffery 先验法

θ 的后验分布为 $\pi(\theta | x) = \text{Gamma}(m, \sum_{i=1}^m x_i)$, 易求得特征寿命的贝叶斯均值为

$$\bar{\beta} = \left(\sum_{i=1}^m N_i^c / m \right)^{1/\alpha} \quad (5)$$

这与极大似然法的结果相同。

若 $\theta \sim \text{Gamma}(m, \sum_{i=1}^m x_i)$, 则 $2 \sum_{i=1}^m x_i \cdot \theta \sim \chi^2(2m)$, 可求得置信度 c 下的特征寿命值为

$$\beta_c = \left[\frac{2 \sum_{i=1}^m x_i}{\chi_{1-c}^2(2m)} \right]^{1/\alpha} = \frac{\bar{\beta}}{[\chi_{1-c}^2(2m)/(2m)]^{1/\alpha}} = \frac{\bar{\beta}}{S_c} \quad (6)$$

式中: $\chi_{1-c}^2(2m)$ 为 χ^2 分布(自由度为 $2m$)的上侧 $1-c$ 百分位点; c 为置信度; S_c 为置信系数。

(2) 共轭先验的边缘分布矩估计法

θ 的后验分布为 $\pi(\theta | x) = \text{Gamma}(m + a, \sum_{i=1}^m x_i + \lambda)$, 易求得特征寿命的贝叶斯均值和置信度为 c 的特征寿命分别为

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \left[\left(\sum_{i=1}^m N_i^c + \lambda \right) / (m + a) \right]^{1/\alpha} \quad (7) \\ \beta_c &= \left\{ \frac{2 \left(\sum_{i=1}^m x_i + \lambda \right)}{\chi_{1-c}^2[2(m + a)]} \right\}^{1/\alpha} \\ &= \frac{\bar{\beta}}{\{ \chi_{1-c}^2[2(m + a)] / [2(m + a)] \}^{1/\alpha}} = \frac{\bar{\beta}}{S_c} \quad (8) \end{aligned}$$

若将 Jeffery 先验中的 m 换成 $m + a$, $\sum x_i$ 换成 $\sum x_i + \lambda$, 即可得到共轭先验法的结果。问题的关键在于超参数的求解。若参数 θ 的先验信息(经验和历史数据)足够,则可利用先验信息确定先验分布的超参数;然而通常参数 θ 的先验信息不足,可利用边缘分布 $m(x)$ 确定超参数 a 和 λ 的值,该方法称为参数经验贝叶斯法^[10]。

利用相关概率公式,可求得边缘分布的表达式为

$$\begin{aligned} m(x) &= \int L(x | \theta) \cdot \pi(\theta) d\theta \\ &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a + 1)}{(x + \lambda)^{a+1}} = \frac{a \cdot \lambda^a}{(x + \lambda)^{a+1}} \quad (9) \end{aligned}$$

再用相应的样本矩代替边缘分布的一阶及二阶矩来求解超参数 a 和 λ , 如式(10)所示。

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i = \frac{\lambda}{a-1} \\ S^{*2} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{\lambda}{a-1}\right)^2 \cdot \frac{a}{a-2} \end{cases} \quad (10)$$

该方法称为矩估计法,将其代入式(7)和式(8),即可求得相应的特征寿命估计值。

1.2 虚拟增广样本的 Bootstrap 法

Bootstrap 法^[7]实质是对原始样本的再抽样过程,可以较好地解决样本容量 ≥ 10 的小子样试验评估问题。Bootstrap 法的准确度主要取决于样本的质量和产生随机样本的方法,对于样本数 < 10 的小子样,尤其是 $n=1$ 或 $n=2$ 的极小子样,Bootstrap 法也无能为力,由此出现了虚拟增广样本评估法。其基本思想是:根据原始试验样本及疲劳寿命的母体分布,把原始小样本虚拟增广至 $n \geq 10$ 的样本;其立论依据为:虚拟增广样本的分布参数点

估计值应与原始试验样本相等。有关 Weibull 分布的虚拟增广样本方法详见文献[11]。

应用 Bootstrap 法对虚拟增广样本进行评估时,一般取再抽样次数 $\geq 10^4$ 才能确保特征寿命的分布趋于稳定,此时极大样本量的特征寿命值近似服从正态分布,可用样本均值来估算特征寿命的均值 $\bar{\beta}$,用极大样本排序后序数为 $1-c$ 的数值来表示置信度为 c 的特征寿命,而不再使用置信系数 S_c 的概念。也可基于极大样本,由极大似然法拟合出正态分布的均值和方差,再把置信系数 S_c 表示出来,因为引入了正态分布的假设,故本文不推荐这种方法。

1.3 不同参数估计法的结果对比

李宴宴^[12]的七组直耳片疲劳试验数据中,五组为常幅谱试验数据,两组为块谱(三级谱)试验数据。材料为 2024-T3,应力集中系数 $K_t \approx 3$,试验结果如表 1 所示。

表 1 直耳片疲劳试验数据
Table 1 Fatigue test data of straight lugs

类别	组别	名义应力幅值/MPa			疲劳寿命 N(循环数)
常幅谱	1	38.46			365105,171327,230701,119173,408225,346068
	2	42.73			264258,114391,184623,94016,128481,274699
	3	47.00			142472,153949,58218,61666,77398,125822
	4	51.27			88052,92552,79573,112558,91475,61711
	5	55.55			76450,76292,80238,62208,92312,91673
块谱	6	27.77	42.73	36.32	364397,371112,426219,507405,522772,670298
		500*	302*	600*	
	7	27.77	42.73	36.32	357136,484186,485859,512556,520158,814476
		674*	200*	727*	

注: * 表示块谱的每级应力循环数

将七组试验样本数据分别代入上述的参数估计方法,形状参数 α 取为 4,可求解出相应的特征寿命的估计值,结果如表 2 所示。其中,前三行数据是特征寿命的均值估计,分别对应贝叶斯 Jef-

fery 先验法、共轭先验的边缘分布矩估计法和虚拟增广 Bootstrap 法(取增广样本数为 12,再抽样次数为 10^5);后三行数据是置信度 c 下的特征寿命估计值,同样分别对应三种方法,取 $c=95\%$ 。

表 2 不同特征寿命估计法的结果对比
Table 2 Results comparison of different characteristic life estimation method

特征寿命	不同估计方法	组 别						
		1	2	3	4	5	6	7
$\bar{\beta}$	贝叶斯 Jeffery 先验	321 095	212 586	121 001	91 393	81 729	512 039	586 354
	贝叶斯共轭先验	318 112	207 824	119 321	84 987	77 568	510 774	571 828
	虚拟增广 Bootstrap	329 156	217 875	124 085	93 699	83 762	525 016	601 067
β_c	贝叶斯 Jeffery 先验	279 087	184 774	105 170	79 436	71 036	445 050	509 642
	贝叶斯共轭先验	295 985	186 917	109 461	71 984	66 926	491 258	511 953
	虚拟增广 Bootstrap	297 991	197 179	112 271	84 788	75 808	475 027	543 884

通过比较表2中的数据可知:①相比贝叶斯法,虚拟增广 Bootstrap 法的特征寿命均值和置信度 c 下的值都偏大,这与原始样本的虚拟增广方法和 Bootstrap 法的抽样特点有很大关系;②贝叶斯法中,共轭先验法相比 Jeffery 先验法,特征寿命的均值偏小,这主要是由于先验信息不足,本文采用样本边缘分布的矩估计法来计算超参数,根据式(5)、式(6)和式(10),可证明均值偏小,而置信度 c 下的值可能偏大或偏小;③贝叶斯法中,Jeffery 先验法在计算上相对简便,这是该法在工程中被广泛使用的主要原因。如若先验信息(经验和历史数据)足够,共轭先验法的结果则更为可靠。

2 特征寿命估计的合理性检验

通过上述参数估计方法得到寿命分布的特征寿命后,需要采用一定方法来检验该寿命分布假设

对于试验样本的合理性和准确性。通常采用经验分布函数(EDF)型拟合检验方法,可分为 $K-S$ 检验、 W^2 检验和 A^2 检验。其中 $K-S$ 检验属于上确界型统计量类型, W^2 检验和 A^2 检验属于平方差型统计量类型^[18]。当理论分布的参数未知时,一般取显著度 $\alpha=0.05$ ^[1],上述三种拟合检验的 EDF 统计量临界值分别为 0.895、0.126、0.754。

采用 1.3 节的七组试验样本数据,形状参数 $\alpha=4$,特征寿命分别取为上述参数估计方法所得的均值,可求得相应的 EDF 拟合检验统计量,如表 3 所示。将表 3 中的统计量数据与临界值进行比较,可知三种估计方法所得的特征寿命值均不能完全通过七组试验数据的拟合优度检验。其原因是试验样本容量很小,难免引起经验分布函数与理论分布函数的较大偏差;且寿命分布的形状参数是基于经验值的。

表 3 不同特征寿命估计值的 EDF 统计量对比

Table 3 EDF statistics comparison of different characteristic life estimate

组别	贝叶斯 Jeffery 先验法			贝叶斯共轭先验法			虚拟增广 Bootstrap 法		
	$\sqrt{n}D$	W^2	A^2	$\sqrt{n}D$	W^2	A^2	$\sqrt{n}D$	W^2	A^2
1	0.651 7	0.109 7	0.814 6	0.632 8	0.111 9	0.817 2	0.699 5	0.107 2	0.839 5
2	0.918 8	0.177 7	1.260 2	0.891 8	0.167 7	1.231 8	0.945 7	0.190 1	1.328 9
3	0.847 2	0.140 0	0.991 9	0.827 3	0.142 7	0.991 8	0.880 7	0.138 3	1.027 8
4	0.662 4	0.098 3	0.514 9	0.905 4	0.218 3	1.066 5	0.585 2	0.081 8	0.449 0
5	0.894 9	0.163 4	0.862 3	1.080 4	0.268 7	1.308 9	0.810 4	0.135 7	0.755 4
6	0.554 2	0.045 4	0.320 3	0.559 0	0.045 5	0.322 8	0.508 3	0.049 8	0.322 5
7	0.910 3	0.138 9	0.724 3	0.826 9	0.121 2	0.706 9	0.989 7	0.163 7	0.784 2

若形状参数亦由样本数据估算获得,则寿命分布通过 EDF 拟合检验的概率可大大提高,本文不提倡这种做法,因为基于小子样试验数据的形状参数与理论分布值有不容忽视的差别。而且,拟合检验的通过与否只能得出特征寿命估计值合不合理的结论,而无法判断估计值相比母体值偏大或偏小,说明 EDF 拟合检验法无法对特征寿命的估计进行实质性指导。

鉴于此,本文提出了一种新的寿命分布检验方法,即用试验样本数据是否全部落入寿命分布 $(1-\alpha)$ 双侧百分位区间来检验假设分布的合理性。若全部落入,说明估计的寿命分布对于该样本没有显著的不合理,接受该分布假设;若有数据未落入,则

说明存在显著的不合理,应拒绝该假设。在疲劳试验数据分析中,显著度不宜过小,否则该检验就失去了应用价值,一般取为 5%。对于有样本数据未落入寿命分布 95% 双侧百分位区间的情况,可分为以下三种:①如有数据落入下侧 2.5% 区间,说明寿命分布应更偏向左侧;②如有数据落入上侧 2.5% 区间,说明寿命分布应更偏向右侧;③如有数据同时落入上侧和下侧 2.5% 区间,说明寿命分布的分散性应更大。前两种情况只表明偏度的方向,与分散性(方差)没有必然联系。

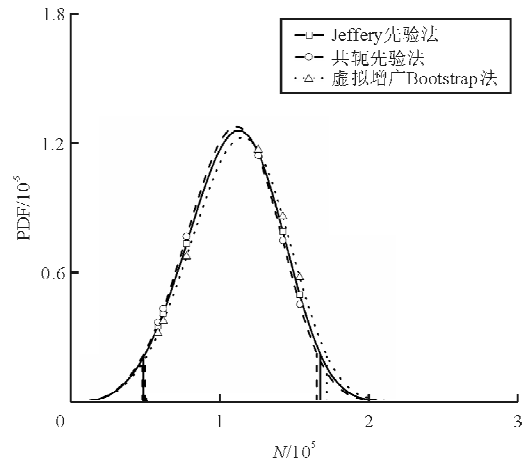
对于 1.3 节的七组疲劳试验数据,特征寿命分别取为上述参数估计方法所得的均值,可求解出每组样本数据未落入各自寿命分布 95% 区间的个

数,如表 4 所示。疲劳寿命概率密度曲线和 95% 区间边界线如图 1 所示,分别对应三种不同参数估计方法,散点表示试验样本数据,从而可以直观地判断样本数据落入 95% 寿命区间的情况。

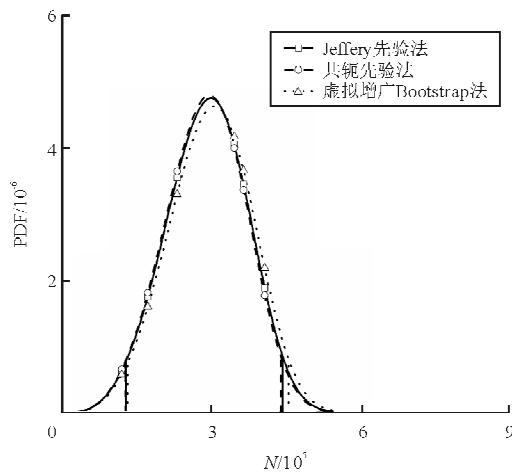
表 4 样本数据未落入寿命分布 95% 区间的个数

Table 4 Number of fatigue data outside 95% interval of fatigue life

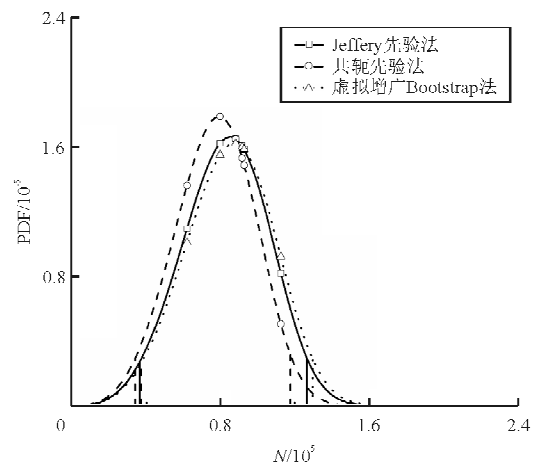
估计方法	组 别						
	1	2	3	4	5	6	7
Jeffery 先验法	1	0	0	0	0	0	1
共轭先验法	1	0	0	0	0	0	1
虚拟增广 Bootstrap 法	1	0	0	0	0	0	0



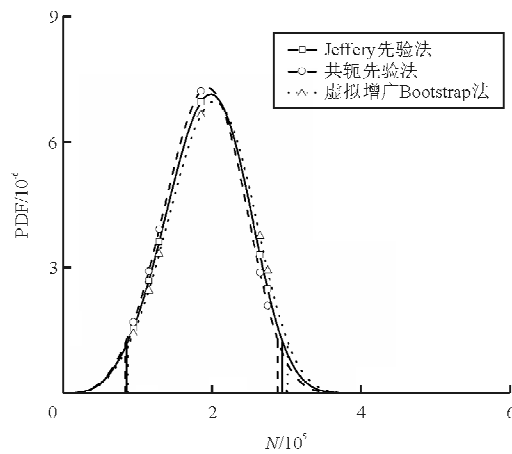
(c) 第三组



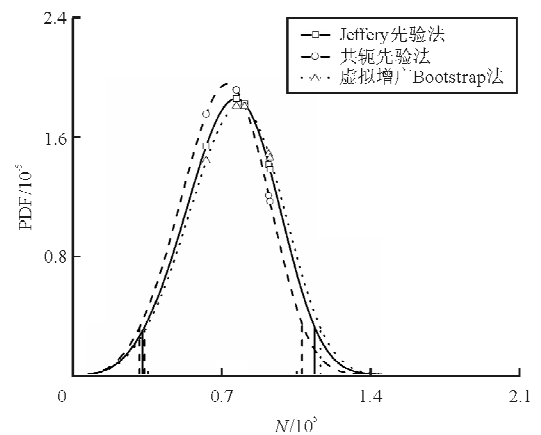
(a) 第一组



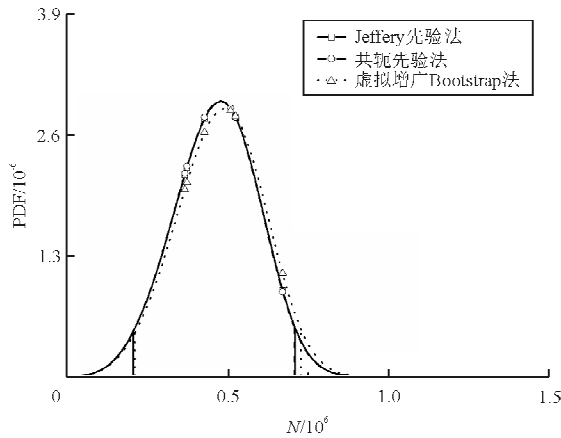
(d) 第四组



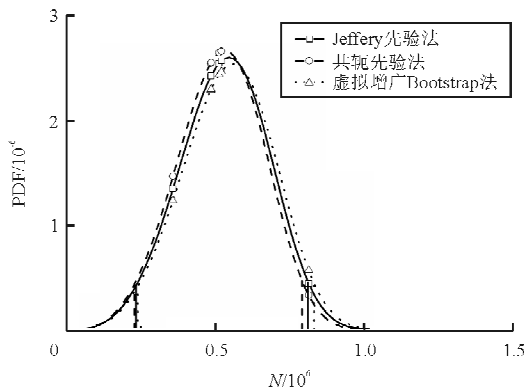
(b) 第二组



(e) 第五组



(f) 第六组



(g) 第七组

图1 七组试验数据的概率密度曲线图

Fig.1 Probability density curves for seven groups of test data

从表4和图1可以看出:①三条概率密度曲线比较接近,且试验数据落入各自寿命95%区间的情况基本一致;不同之处在于第七组试验数据,样本数据仅全部落入虚拟增广Bootstrap法得到的95%寿命区间,原因在于其分散性最大。②第一组试验数据的样本最小值落入了寿命分布的下侧2.5%区间,表明寿命分布应更偏向左边,在形状参数已知的前提下,意味着特征寿命值应该更小一些,这样寿命分布的均值和方差都会减小。③对于贝叶斯法得到的寿命分布,第七组试验数据的样本最大值落入了寿命分布的上侧2.5%区间,表明寿命分布应更偏向右边,在形状参数已知的前提下,意味着特征寿命值应该更大一些,这样寿命分布的均值和方差都会增大。④其余组的试验数据均落入

了各自分布的95%双侧百分位区间,表明特征寿命估计值对于样本数据没有显著的不合理。

3 结论

(1) 相比于贝叶斯法,虚拟增广Bootstrap法估计的特征寿命均值和置信度 c 下的值均偏大;而对于共轭先验法,由于先验信息不足,本文采用样本边缘分布的矩估计法来计算超参数,导致其特征寿命均值相比Jeffery先验法偏小,而Jeffery先验法在计算上相对简便。

(2) EDF拟合检验法无法对特征寿命的估计进行实质性指导,因为它只能判断特征寿命估计值的合理与否,而无法判断估计值相较于母体值偏大或偏小。

(3) 利用样本数据是否全部落入寿命分布(1-a)双侧百分位区间的判定方法,可定性判断特征寿命估计值偏大或偏小,对特征寿命的估计有一定的指导意义。

参考文献

- [1] 高镇同. 疲劳应用统计学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1986.
Gao Zhen tong. Fatigue applied statistics[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1986. (in Chinese)
- [2] Wallodi Weibull, Stockholm, Sweden. A statistical distribution function of wide applicability[J]. Journal of Applied Mechanics, 1951; 293-297.
- [3] 中国航空科学技术研究院. 飞机结构可靠性分析与设计指南[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1995.
China Academy of Civil Aviation Science and Technology. Reliability analysis and design guide of aircraft structures [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1995. (in Chinese)
- [4] 杨谋存, 聂宏. 三参数Weibull分布参数的极大似然估计数值解法[J]. 南京航空航天大学学报, 2007, 39(1): 22-25.
Yang Moucun, Nie Hong. Advanced algorithm for maximum likelihood estimation of three parameter weibull distribution[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2007, 39(1): 22-25. (in Chinese)
- [5] 茆诗松. 贝叶斯统计[M]. 北京: 中国统计出版社, 2003.
Mao Shisong. Bayesian statistics[M]. Beijing: China Statistics Press, 2003. (in Chinese)
- [6] 翟艳敏. 威布尔分布场合的贝叶斯统计推断[D]. 成都: 西南交通大学数学学院, 2000.
Zhai Yanmin. Bayesian analysis for Weibull distribution [D]. Chengdu: School of Mathematics, Southwest Jiaotong

- University, 2000. (in Chinese)
- [7] B Efron, R J Tibshirani. An introduction to the bootstrap [M]. London, Chapman and Hall, 1993.
- [8] 黄玮, 冯蕴雯, 吕震宙. 基于 Bootstrap 方法的小子样试验评估方法研究[J]. 机械科学与技术, 2006, 25(1): 31-35.
Huang Wei, Feng Yunwen, Lü Zhenzhou. Study on small scale sample test estimation method based on bootstrap method[J]. Mechanical Science and Technology, 2006, 25(1): 31-35. (in Chinese)
- [9] 刘伟, 龙琼. Bootstrap 方法的几点思考[J]. 飞行器测控学报, 2007, 26(5): 78-81.
Liu Wei, Long Qiong. Reflections on bootstrap method[J]. Journal of Spacecraft TT&C Technology. 2007, 26(5): 78-81. (in Chinese)
- [10] 李少玉. 参数的经验贝叶斯估计问题[D]. 武汉: 华中科技大学数学与统计学院, 2006.
Li Shaoyu. The empirical bayes estimation for parameters [D]. Wuhan: School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science & Technology, 2006. (in Chinese)
- [11] 黄玮. 薄壁连接结构的疲劳可靠性优化设计技术研究[D]. 西安: 西北工业大学航空学院, 2008.
Huang Wei. Fatigue reliability-based optimization design for riveted lap joint of thin wall structure [D]. Xi'an: School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, 2008. (in Chinese).
- [12] 李宴宾. 飞机结构疲劳加速谱和多部位损伤概率模型研究 [D]. 西安: 中国飞机强度研究所, 2011.
Li Yanbin. Research of aircraft structure fatigue acceleration spectrum and multi-site-damage probability model [D]. Aircraft Strength Research Institute of China, 2011. (in Chinese)
- [13] 董聪, 戎海武, 杨庆雄. 先进拟合优度检验方法及应用[J]. 强度与环境, 1994(1): 23-31.
Dong Cong, Rong Haiwu, Yang Qingxiong. A method of advanced goodness-of-fit tests and its applications [J]. Structure & Environment Engineering, 1994(1): 23-31. (in Chinese)

作者简介:

兑红娜(1988—),女,硕士研究生。主要研究方向:飞行器结构设计。

孙 秦(1957—),男,博士,教授,博导。主要研究方向:飞行器结构设计。

(编辑:马文静)