

# 两种典型非结构网格变形方法特性对比研究

高传强<sup>1</sup>, 张伟伟<sup>1</sup>, 蒋跃文<sup>1,2</sup>, 叶正寅<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

(2. 牛津大学 工学院, 牛津 OX1 3PJ)

**摘要:** 非定常流动仿真中常常遇到运动边界的情形, 基于物理模型的线性弹簧法和基于数学方法的径向基函数(RBFs)插值法是实现计算网格随运动边界变化的两种主要的非结构网格变形方法。以 NACA0012 翼型的俯仰运动为例, 对上述两种方法的变形特性进行较详细地定量分析研究, 比较线性弹簧法和 RBFs 方法的 CPU 计算时间和最大变形能力, 分析两种方法的网格质量随俯仰角度和运动步数的关系, 并给出典型状态下网格单元质量云图和流场计算结果。结果表明: 基于 RBFs 插值的网格变形方法计算效率较高, 变形能力较强且能保持较高的网格质量, 是一种高效的网格变形方法。

**关键词:** 非定常流动; 径向基函数; 网格变形; 线性弹簧法; 非结构网格

**中图分类号:** V211.3

**文献标识码:** A

## A Comparative Study on Two Typical Unstructured Grid Deformation Methods

Gao Chuanqiang<sup>1</sup>, Zhang Weiwei<sup>1</sup>, Jiang Yuewen<sup>1,2</sup>, Ye Zhengyin<sup>1</sup>

(1. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. Department of Engineering Science, University of Oxford, Oxford OX1 3PJ, England)

**Abstract:** In simulation of unsteady flow, the moved boundary should be often considered. The linear spring analogy method, based on the physical model, and the radial basis functions(RBFs) interpolation method, based on the algebraic method are two typical and common unstructured grid deformation methods to achieve the computing grid deformed with the moved boundary in unsteady flow simulation. A detailed quantitative study is conducted on the deformation characteristics of the two methods. First of all, the pitching of NACA0012 airfoil is taken as an example to compare the CPU time and the maximum deformation capacity of the two methods. Furthermore, the mesh quality and cell quality contours under typical pitch angles change with pitching angles and time steps are also studied. A standard flow solver result is proposed as well. The above results show that the RBFs method is remarked with higher numerical efficiency, stronger adapting ability for large mesh deformation and higher stability for mesh quality comparing with the linear spring analogy method.

**Key words:** unsteady flow; radial basis functions; grid deformation; linear spring analogy method; unstructured grid

## 0 引言

非定常流动数值模拟中的运动边界问题是计

算流体力学的热点和难点之一<sup>[1-2]</sup>。运动边界的处理方法主要是网格变形技术, 即根据实际问题中的边界运动情况对原始计算网格进行相应的更新。目前, 非结构网格的网格变形方法主要有基于物理模型的弹簧法和基于数学方法的径向基函数(RBFs)插值方法<sup>[3-4]</sup>。

弹簧法由 J. T. Batina<sup>[5]</sup> 在研究绕振荡翼型的 Euler 流动时提出。该方法将计算域内的每一条

收稿日期: 2013-09-29; 修回日期: 2013-11-07

基金项目: 国家自然科学基金(11172237)

航空科学基金(20121353014)

通信作者: 张伟伟, aeroelastic@nwpu.edu.cn

网格线看作一根弹簧,整个网格则看成一个弹簧系统,物面边界引起的变形效应通过弹簧系统传递到整个计算域。弹簧的刚度系数仅由网格线的长度决定,所以又叫线性弹簧法或标准弹簧法。C. Farhat等<sup>[6]</sup>将扭转因子引入弹簧刚度系数,建立了扭转弹簧法,在一定程度上避免网格边的交叉,提高网格的变形能力。F. J. Blom<sup>[7]</sup>在研究二维可动边界问题时,通过引入角度约束,提出了半扭转弹簧法。霍世慧等<sup>[8]</sup>将网格的倾斜度和纵横比引入弹簧的刚度系数定义中,较大地提高了网格的变形能力。上述改进方法虽然一定程度上提高了网格的变形能力,但是并未从根本上解决弹簧法的计算效率较低和数据存储复杂(需要节点间连接关系)等问题。

RBFs 插值,作为一种数学插值方法,在各种散乱数据插值方面能取得满意的结果<sup>[9]</sup>,近年来开始用于网格变形。A. Boer<sup>[10]</sup>首次将 RBFs 应用于网格变形技术,其基本原理是:运用 RBFs 对物面边界节点的位移进行插值,然后利用构造出来的 RBFs 序列将物面位移效应光滑地分散到整个网格区域。插值过程仅需要网格节点的坐标,而无需节点间连接信息,所以数据结构简单,计算量主要由物面节点数决定,对于二维问题有较高的计算效率。T. C. Rendall 等<sup>[11-12]</sup>提出的基于贪心算法的物面节点精简方法,较大地提高了计算效率。王刚等<sup>[13]</sup>进一步提出了一种更高效的数据精简方法,该方法对计算效率提高显著。林言中等<sup>[14]</sup>分析了不同基函数和紧支半径对网格质量和计算效率的影响,并与传统方法的简单对比验证了 RBFs 方法的有效性。

上述研究均只针对某一种方法的介绍或改进,缺乏两种方法较详尽的比较。本文基于上述两种典型的非结构网格变形方法,以 NACA0012 翼型的非结构网格为例,针对网格变形过程中的变形效率、最大变形能力和网格质量等特性进行较详细地定量分析和标准算例的流场求解,并且总结两种方法在非结构网格变形方面的优劣。

## 1 两种网格变形技术的基本方法

### 1.1 线性弹簧法

采用顶点弹簧描述方法,网格变形过程中网格

节点的受力始终等于初始状态所受合力。节点  $i$  和  $j$  间的弹簧张力表示为

$$\mathbf{F}_{ij} = K_{ij}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (1)$$

式中: $K_{ij}$ 为连接节点  $i$  和  $j$  弹簧的刚度系数; $\mathbf{r}_i$  和  $\mathbf{r}_j$  分别为节点  $i$  和  $j$  的位置矢量。

对于节点  $i$ ,假设计算域中共有  $N_i$  个节点与之相连,则合力表示为

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{N_i} K_{ij}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (2)$$

计算域中  $N_v$  个节点在初始状态下平衡方程的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{N_i} K_{1j} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1N_i} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ K_{i1} & \cdots & -\sum_{j=1}^{N_i} K_{ij} & \cdots & K_{iN_i} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ K_{N_v 1} & \cdots & K_{N_v j} & \cdots & -\sum_{j=1}^{N_{N_v}} K_{N_v j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_i \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{N_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_i \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{N_v} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中:下标  $v$  表示体网格; $N_v$  为体网格节点数目。

当物面边界变形时,通过改变物面边界位置矢量,建立新的系数方程,求解方程(3)得到变形后的网格节点坐标。

本文采用线性弹簧法,其刚度系数定义为  $K_{ij} = 1/l_{ij}^2$ ,其中  $l_{ij}$  是网格边的边长。

### 1.2 径向基函数插值方法

RBFs 插值的基本形式为

$$s(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_b} \gamma_i \varphi(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{bi}\|) \quad (4)$$

式中: $\gamma_i$  为第  $i$  个插值基底的插值权重系数; $\varphi(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{bi}\|)$  为 RBFs 的通用形式, $\mathbf{r}_{bi}$  为插值基底的位置,此处即与运动直接相关的物面节点的坐标; $N_b$  为插值基底的个数,即物面节点数。

基于 RBFs 的网格变形方法主要有两个步骤, 首先根据插值条件求解物面节点的权重系数方程, 然后对计算域网格进行更新, 其流程如图 1 所示。

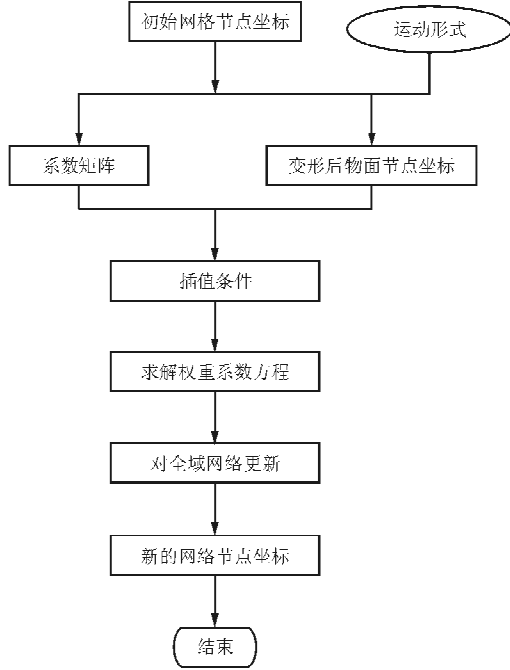


图 1 基于 RBFs 的网格变形方法的基本流程

Fig. 1 Process of the mesh deformation with RBFs

为了方便, 用矩阵形式表述 RBFs 插值过程, 对于二维问题, 只有  $x$  和  $y$  两个方向的坐标。插值条件如下:

$$\begin{cases} M\boldsymbol{\gamma}_x = \Delta\boldsymbol{x}_s \\ M\boldsymbol{\gamma}_y = \Delta\boldsymbol{y}_s \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $\boldsymbol{\gamma}_x = [\gamma_{s1}^x, \dots, \gamma_{sN_b}^x]^T$  为  $x$  方向上  $N_b$  个物面节点待定的插值权重系数, 下标  $s$  表示物面;  $\Delta\boldsymbol{x}_s = [\Delta x_{s1}, \dots, \Delta x_{sN_b}]^T$  为  $N_b$  个物面节点在  $x$  方向上的位移分量,  $y$  方向与之类似; 系数矩阵

$$M = \begin{bmatrix} \varphi_{s_1 s_2} & \cdots & \varphi_{s_1 s_i} & \cdots & \varphi_{s_1 s_{N_b}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{s_j s_1} & \cdots & \varphi_{s_j s_i} & \cdots & \varphi_{s_j s_{N_b}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{s_{N_b} s_1} & \cdots & \varphi_{s_{N_b} s_i} & \cdots & \varphi_{s_{N_b} s_{N_b}} \end{bmatrix}, \text{ 其中}$$

$\varphi_{s_j s_i} = \varphi(\xi_{ji}) = \varphi(\|r_j - r_i\|)$  为物面第  $j$  个节点和第  $i$  个节点的基函数值。

网格点的更新只需将计算域内的网格点坐标

代入 RBFs 插值函数即可。以矩阵形式表示为

$$\begin{cases} \Delta\boldsymbol{x}_v = A\boldsymbol{\gamma}_x = A\boldsymbol{M}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}_s \\ \Delta\boldsymbol{y}_v = A\boldsymbol{\gamma}_y = A\boldsymbol{M}^{-1}\Delta\boldsymbol{y}_s \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{式中: } A = \begin{bmatrix} \varphi_{v_1 s_1} & \cdots & \varphi_{v_1 s_i} & \cdots & \varphi_{v_1 s_{N_b}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{v_j s_1} & \cdots & \varphi_{v_j s_i} & \cdots & \varphi_{v_j s_{N_b}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{v_{N_v} s_1} & \cdots & \varphi_{v_{N_v} s_i} & \cdots & \varphi_{v_{N_v} s_{N_b}} \end{bmatrix}.$$

## 2 网格质量定义

为了考察网格质量, 建立基于二维非结构三角形网格单元的网格质量评价指标<sup>[15]</sup>, 即面积指标  $f_{size}$ 、形状指标  $f_{shape}$  以及综合指标  $f_{size-shape}$ 。

定义  $f_{size} = \min(\tau, 1/\tau)$ , 其中  $\tau = S/\zeta$ ,  $S$  为三角形单元的面积,  $\zeta$  为参考面积, 此处定义为以该三角形单元第二长边构建的等边三角形的面积。定义  $f_{shape} = 4\sqrt{3}S/(a^2 + b^2 + c^2)$ , 其中  $a, b, c$  是三角形单元的三边边长。

上述指标分别从面积和形状两个独立的方面表征三角形单元的质量, 将两个指标相结合建立比较全面的网格质量评价指标, 即  $f_{size-shape} = f_{size} \cdot f_{shape}$ 。当  $f_{size-shape} = 1$  时, 单元的总质量最好; 当  $f_{size-shape} = 0$  时, 单元的总质量最差。

四个三角形网格单元如图 2 所示, 底边边长均为 1 m, 单元 1 是等边三角形, 单元 4 的倾斜幅度很大。四个单元的单元质量如表 1 所示, 随着倾斜度增加, 网格单元质量逐渐降低, 评价指标  $f_{size-shape}$  可以较好地反映三角形网格单元的质量。

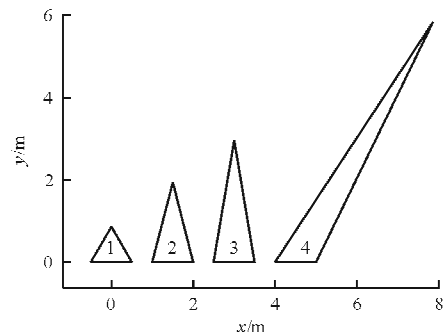


图 2 四种典型非结构三角形网格单元

Fig. 2 Four typical unstructured triangular elements

表 1 四个网格单元的网格质量

Table 1 Quality of meshes with four elements

名称	$f_{size}$	$f_{shape}$	$f_{size-shape}$
单元 1	1.000	1.000	1.000
单元 2	0.559	0.745	0.417
单元 3	0.379	0.539	0.205
单元 4	0.160	0.219	0.035

对于计算域内全部网格单元,定义  $f_{mean} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_e} f_{size-shape}}{N_e}$$

为所有网格平均网格单元质量,  $f_{min} =$

$\min(f_{size-shape}^1, \dots, f_{size-shape}^i, \dots, f_{size-shape}^{N_e})$  为所有网格的最小网格单元质量,其中  $N_e$  为网格单元数。

### 3 算例分析及流场验证

本文以 NACA0012 翼型的二维非结构网格为例,比较研究线性弹簧法和 RBFs 方法的计算效率、最大变形能力和网格质量。线性弹簧法的平衡方程阶数较高,采用 Gauss-Seidel 迭代法求解。在 RBFs 方法中,权重系数方程是对称正定的,且阶数较低,采用 Gauss-Jordan 消去法求解。插值基函数选用最适合网格变形的紧支型 Wendland's  $C^2$  函数,该函数可以通过设置作用半径使作用半径之外的函数值强制为 0,具体形式为

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} (1-\zeta)^4(4\zeta+1) & \zeta < 1 \\ 0 & \zeta > 1 \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $\zeta = \|r - r_i\| / R$ ,  $R$  为作用半径,本文中一般取 10 倍弦长。

#### 3.1 CPU 计算时间比较

文献[5]指出,线性弹簧法每次网格更新均需求解一次  $N_v \times N_v$  阶的平衡方程,而 RBFs 方法求解的权重系数方程为  $N_b \times N_b$  阶,所以对于二维网格变形两种方法的计算量如表 2 所示。

表 2 线性弹簧法和 RBFs 方法计算量比较

Table 2 Algorithm costs of linear spring method and RBFs

方法	步骤	计算量
RBFs	方程求解	$N_b^3$
	网格更新	$N_b N_v$
线性弹簧	—	$N_v^3$

不加控制的情况下,二维网格总节点数的增长与物面节点数的增长呈近似平方关系。为了研究物面节点数和网格总节点数对计算效率的影响,控制网格总节点数,保证物面节点数和总节点数均按近似线性的规律增长。7 组不同物面节点数和网格总节点数的算例网格如表 3 所示。

表 3 不同物面节点数和总节点数的算例网格

Table 3 Meshes with different boundary nodes and volume nodes

编号	物面节点	总节点
1	50	1 097
2	76	1 660
3	100	2 288
4	150	4 021
5	200	6 738
6	250	9 242
7	300	12 640

NACA0012 翼型绕 1/4 弦点做俯仰运动,俯仰角度为  $10^\circ$ ,每周期运动 40 步,计算 1/4 周期即 10 步,各算例网格的 CPU 计算时间如图 3 所示。

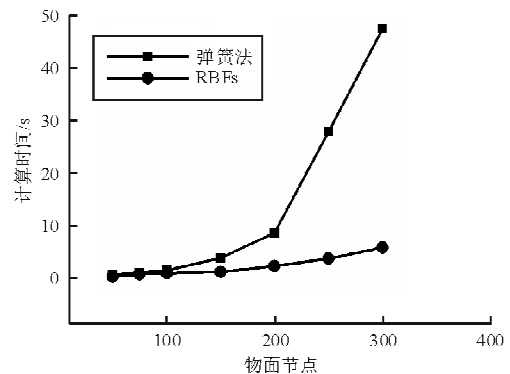


图 3 CPU 计算时间随物面节点的变化

Fig. 3 Changes of CPU time with boundary nodes

从图 3 可以看出,当物面节点(总节点数)较少时,RBFs 和线性弹簧法的计算时间相差不大,随着物面节点数(总节点数)增加,两者的计算时间均增加,但是线性弹簧法的计算时间增长迅速,计算效率远低于 RBFs 方法。

两种方法的计算时间随俯仰角度的变化规律如图 4 所示。网格为 2 号网格,一周运动 40 步,计算 1/4 周期。

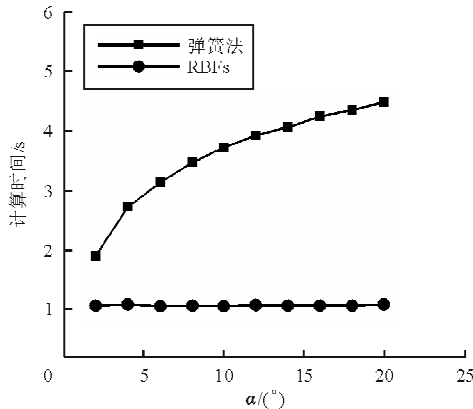


图 4 CPU 计算时间随俯仰角度的变化

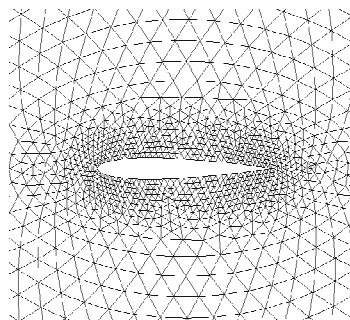
Fig. 4 Changes of CPU time with pitching angle

从图 4 可以看出,随着俯仰角的增大,线性弹簧法的计算时间显著增加,而 RBFs 方法的计算时间几乎保持不变。这主要是由于线性弹簧法在求解平衡方程时采用迭代法,随着俯仰角的增大,迭代过程将更难达到收敛,而 RBFs 采用的是直接法求解权重系数方程,计算时间几乎不受俯仰角的影响。

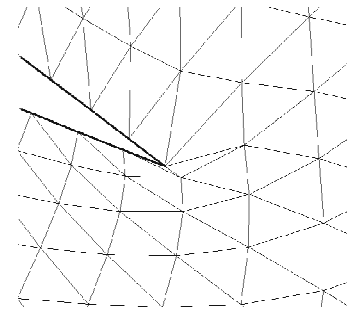
### 3.2 最大变形能力比较

网格的最大变形能力是网格变形的重要指标,对于俯仰运动,翼型尾缘变形量最大,网格拉伸严重,容易出现负体积网格。

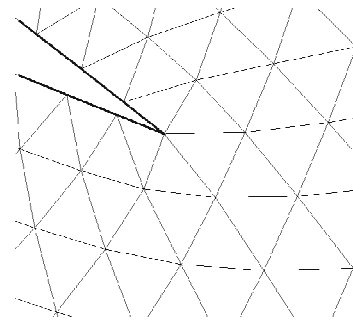
以 2 号网格为例,比较两种方法的最大变形能力,如图 5 所示。该网格的初始网格如图 5(a) 所示。线性弹簧法在俯仰角为  $37^\circ$  时,尾缘处出现负体积网格,网格发生破坏,如图 5(b) 所示。而同等俯仰角度下,RBFs 方法尾缘处的网格保持完好,几乎没有产生拉伸,如图 5(c) 所示。



(a) 初始网格



(b) 线性弹簧法

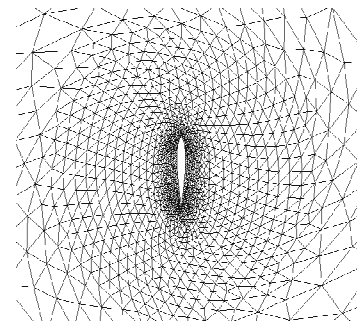


(c) RBFs 方法

图 5 网格变形能力对比

Fig. 5 Capacity of the grid deformation

继续加大 RBFs 方法的俯仰角,在俯仰角为  $90^\circ$  时,尾缘处依旧能保持网格的完好性,尤其近物面网格分布与初始网格保持了很好的一致性,未出现网格的较大拉伸,如图 6 所示。即使更大的俯仰角,RBFs 方法依旧能够保证尾缘处的网格质量。这是因为 RBFs 方法更多的由远场的网格来参与变形,远场处网格单元较大,能承受较大的变形,而线性弹簧法主要由近物面容易破坏的较小的网格单元承受变形,所以 RBFs 方法具有较大的变形能力,此外远场处网格的质量对流场求解精度影响较弱,有利于流场求解,这也是弹簧方法不具有的优势。

图 6 RBFs 方法  $90^\circ$  俯仰时网格Fig. 6 Zoom of the mesh at  $90^\circ$  pitching with RBFs

### 3.3 俯仰迎角和运动步数对网格质量影响

整个计算域网格平均网格质量和最小网格质量随着俯仰角变化的对比如图 7 所示。计算网格为 2 号网格,考虑极端情形,所有的网格变形均一次完成。该套网格在线性弹簧法下的最大俯仰角为  $37^\circ$ ,RBFs 方法计算到  $65^\circ$ 。

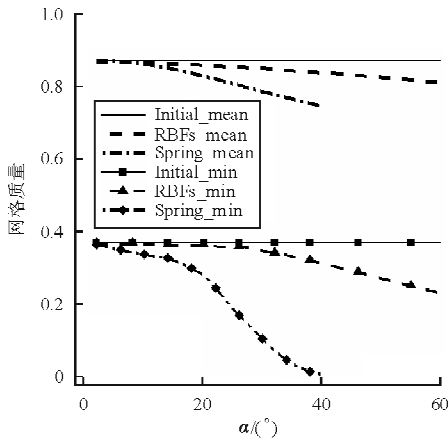
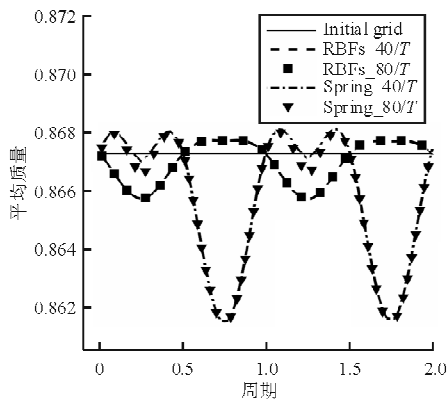


图 7 平均/最小网格质量随俯仰角的变化

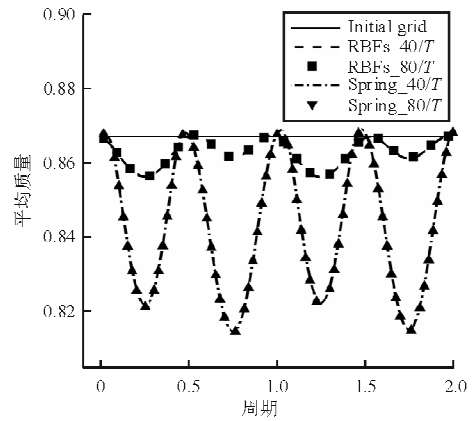
Fig. 7 Influence of pitch angle on the mean/min quality

从图 7 可以看出,随着俯仰角增加,两种方法的网格质量均在下降,但是 RBFs 方法比较稳定,平均网格质量和最小网格质量均明显优于线性弹簧法。线性弹簧法在俯仰角达到  $37^\circ$  时,最小网格质量为 0,这是因为此时网格出现负体积,该网格单元质量最差。

在实际应用中,更关心计算周期内每一步的网格质量。两种方法每周期 40 步和 80 步的平均网格质量和最小网格质量的对比,如图 8~图 9 所示。计算网格选用 2 号网格,俯仰角度为  $5^\circ$  和  $20^\circ$ 。为便于比较,横坐标以周期的形式表示。



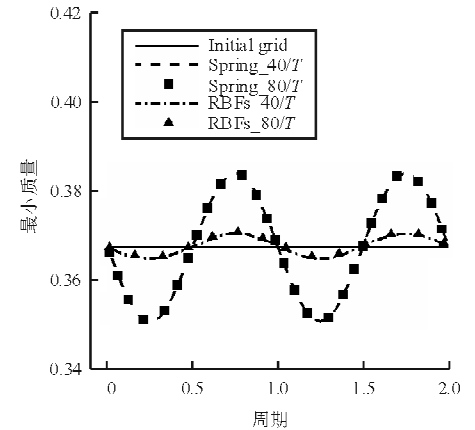
(a)  $5^\circ$  俯仰角



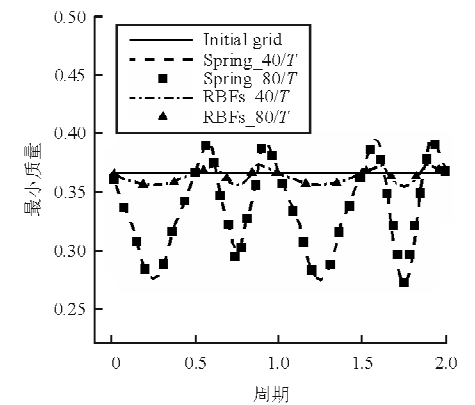
(b)  $20^\circ$  俯仰角

图 8 平均网格质量对比

Fig. 8 Mean quality of the mesh



(a)  $5^\circ$  俯仰角



(b)  $20^\circ$  俯仰角

图 9 最小网格质量对比

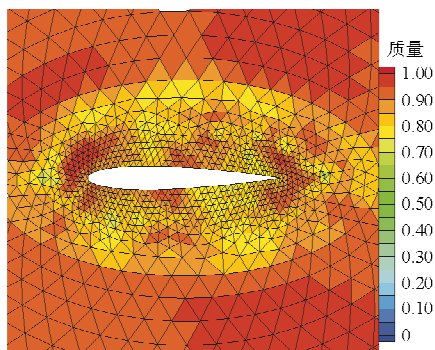
Fig. 9 Min quality of the mesh

从图 8~图 9 可以看出:运动的周期性变化引起网格质量的周期性变化,运动到达最大位置时 ( $1/4T$  和  $3/4T$ ),网格质量最差;运动到达平衡位

置时,网格质量基本等于初始网格质量,即在每周期内存在两个最小峰值,图8(a)的反常现象可能是由于初始网格质量不高造成的。

同时,从图8~图9可以看出,无论是平均网格质量还是最小网格质量,RBFs方法均优于线性弹簧法,尤其当翼型做大角度俯仰时,RBFs方法仍能够确保较优的网格质量。

以2号网格为例,每周期40步,计算1/4周期。初始网格质量云图局部放大如图10(a)所示,网格单元质量均在0.7以上,翼型前缘和尾缘处质量较高。翼型做 $35^\circ$ 俯仰时两种方法的质量云图对比如图10(b)~图10(c)所示。



(a) 初始网格

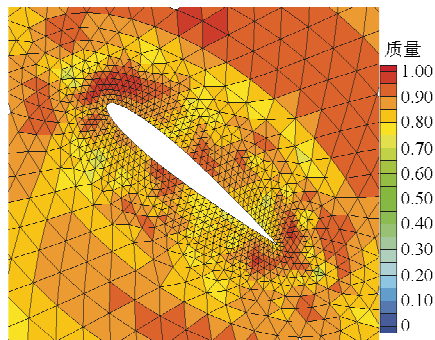
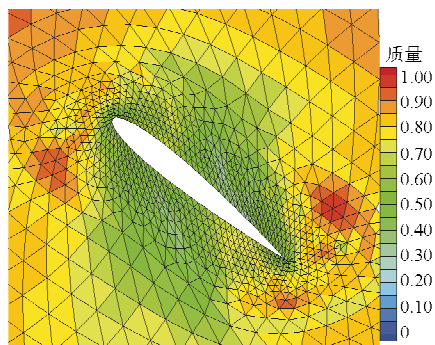
(b)  $35^\circ$ 俯仰时 RBFs 方法(c)  $35^\circ$ 俯仰时线性弹簧法

图10 网格质量云图对比

Fig. 10 Cell quality contours of the mesh

RBFs方法的网格质量明显优于线性弹簧法,尤其是近物面处网格,线性弹簧法在尾缘处发生较大的拉伸,部分网格质量甚至达到0.3以下,而RBFs方法基本保持了原始网格的云图形状和质量。

### 3.4 流场计算结果

分别运用两种方法的网格变形技术分析NA-CA0012翼型简谐振动的非定常气动力。算例选用AGARD report 702中的CT5<sup>[16]</sup>, $\alpha_0=0.016^\circ$ 为平均俯仰角, $\alpha_M=2.51^\circ$ 为最大振幅俯仰角,减缩频率 $k=\omega c/(2v_\infty)$ ,其中 $c$ 为翼型弦长, $\omega$ 为角频率, $v_\infty$ 为无穷远来流速度,马赫数 $Ma_\infty=0.755$ ,雷诺数 $Re_\infty=5.5\times 10^6$ 。升力系数和力矩系数随俯仰角变化,并与文献[18]的实验值对比,如图11~图12所示。结果表明,对于小变形非定常仿真,两种网格方法的计算结果几乎没有差别,与实验值吻合较好。

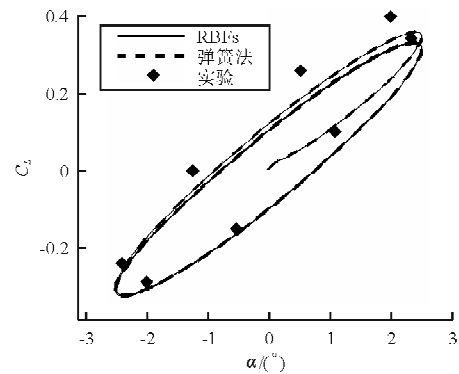


图11 升力系数随俯仰角变化曲线

Fig. 11 Influence of pitch angle on lift coefficient

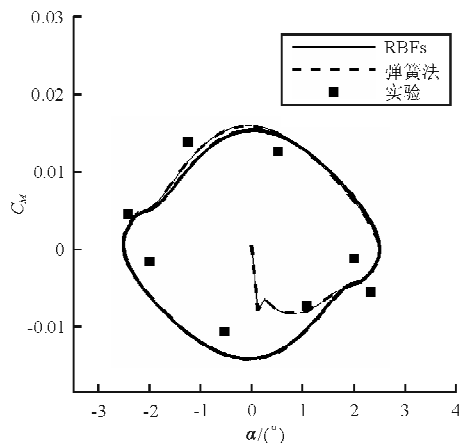


图12 力矩系数随俯仰角变化曲线

Fig. 12 Influence of pitch angle on moment coefficient

## 4 结 论

(1) RBFs 方法的计算量主要由物面节点数决定,并且采用直接法求解权重系数方程可以避免迭代法在大变形下的低效率,RBFs 方法的网格变形效率明显高于线性弹簧法。

(2) 线性弹簧法受物理模型的限制,网格变形能力有限,而 RBFs 方法基于数学插值思想,具有较大的变形能力,翼型俯仰角可以达到  $90^\circ$  甚至更高。

(3) 对 RBFs 方法设置合理的作用半径可以保持近物面和全计算域较高的网格质量,并且网格质量受运动步长影响较小,对大变形的非定常仿真模拟有利。

(4) NACA0012 翼型简谐振动的非定常流动仿真结果与实验值吻合良好,基于 RBFs 插值的网格变形方法可以应用于处理非定常计算中的边界运动问题。

### 参考文献

- [1] Tallec P L, Mouro J. Fluid structure interaction with large structural displacements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(25): 3039-3067.
- [2] Chen Y, Cao S L, Liang K H, et al. Delaunay triangulation for internal node generation in frontal approach and application[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2009, 26(4): 527-533.
- [3] 张来平, 邓小刚, 张涵信. 动网格生成技术及非定常计算方法进展综述[J]. *力学进展*, 2010, 40(4): 424-447. Zhang Laiping, Deng Xiaogang, Zhang Hanxin. Reviews of moving grid generation techniques and numerical methods for unsteady flow[J]. *Advances in Mechanics*, 2010, 40(4): 424-447. (in Chinese)
- [4] 周旋, 李水乡, 孙树立, 等. 非结构网格变形方法研究进展[J]. *力学进展*, 2011, 41(5): 547-561. Zhou Xuan, Li Shuixiang, Sun Shuli, et al. Advances in the research on unstructured mesh deformation[J]. *Advances in Mechanics*, 2011, 41(5): 547-561. (in Chinese)
- [5] Batina J T. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes[J]. *AIAA Journal*, 1990, 28(8): 1381-1388.
- [6] Farhat C, Degand C, Koobus B, et al. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 163(4): 231-245.
- [7] Blom F J. Considerations on the spring analogy[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2000, 32(6): 647-668.
- [8] 霍世慧, 王富生, 岳珠峰. 弹簧近似法在二维非结构动网格生成技术中的应用[J]. *振动与冲击*, 2011, 30(10): 177-182. Huo Shihui, Wang Fusheng, Yue Zhufeng. Spring analogy method for generating of 2D unstructured dynamic meshes[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, 30(10): 177-182. (in Chinese)
- [9] Frank R. Scattered data interpolation; tests of some methods[J]. *Mathematics of Computation*, 1982, 38(175): 191-200.
- [10] Boer A, Schoot M S, Faculty H B. Mesh deformation based on radial basis function interpolation[J]. *Computers and Structures*, 2007, 85(4): 784-795.
- [11] Rendall T C, Allen C B. Efficient mesh motion using radial basis functions with data reduction algorithms[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(5): 6231-6249.
- [12] Rendall T C, Allen C B. Reduced surface point selection options for efficient mesh deformation using radial basis functions[J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 29(5): 2810-2820.
- [13] 王刚, 雷博琪, 叶正寅. 一种基于径向基函数的非结构混合网格变形技术[J]. *西北工业大学学报*, 2011, 29(5): 783-788. Wang Gang, Lei Boqi, Ye Zhengyin. An efficient deformation technique for hybrid unstructured grid using radial basis functions[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2011, 29(5): 783-788. (in Chinese)
- [14] 林言中, 陈兵, 徐旭. 径向基函数插值方法在动网格技术中的应用[J]. *计算物理*, 2012, 29(2): 191-197. Lin Yanzhong, Chen Bing, Xu Xu. Radial basis function interpolation in moving mesh technique[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2012, 29(2): 191-197. (in Chinese)
- [15] Knupp P M. Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2003, 39(3): 217-241.
- [16] Landon R II. NACA0012 oscillatory and transient pitching [R]. AGARD Report 702, United Kingdom: AGARD, 1982.

### 作者简介:

高传强(1988—),男,硕士研究生。主要研究方向:气动弹性力学。

张伟伟(1979—),男,博士,教授,博导。主要研究方向:气动弹性力学,非定常空气动力学,复杂流动的分析、设计与控制。

蒋跃文(1983—),男,博士研究生。主要研究方向:计算流体力学。

叶正寅(1963—),男,博士,教授,博导。主要研究方向:流体力学、流固耦合力学、新概念飞行器空气动力学。

(编辑:赵毓梅)