

文章编号:1674-8190(2014)03-350-08

基于本征正交分解的流场快速预测方法研究

罗杰,段焰辉,蔡晋生

(西北工业大学 航空学院,西安 710072)

摘要:对于飞行器气动设计,通过实验或CFD计算获得所有设计状态处流场信息成本高、耗时长,难以满足工程应用要求。利用基于本征正交分解(POD)降阶模型结合相应的插值方法,只需要通过实验或CFD计算获取有限个数的采样流场,可以快速预测出具有满足精度要求的设计状态处流场信息。首先,证明对POD基系数插值获取预测流场与对采样流场直接插值获取预测流场的等价性,并分析采样流场分布的要求。然后,以三段翼型流场作为研究对象,POD降阶模型分别与三次样条插值和径向基插值结合,实现设计状态处流场信息快速预测。最后,通过将流场预测结果与相同条件下的流场CFD计算结果对比,表明了POD降阶模型结合两种插值方法的各自特性。

关键词:流场预测;本征正交分解;三次样条插值;径向基插值

中图分类号: V211.3

文献标识码: A

A Quick Method of Flow Field Prediction Based on Proper Orthogonal Decomposition

Luo Jie, Duan Yanhui, Cai Jinsheng

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: For aircraft aerodynamic design, the high cost and time wasting of experiment and CFD on obtaining flow field data make it hardly to meet the requirement for aircraft design. By using the proper orthogonal decomposition(POD) combined with interpolation, the flow field data for aircraft design can be quickly got with only a small amount of sample flow fields obtained from experiment or CFD. Firstly, it is proved that the interpolation of the POD base coefficient is equivalent to the direct interpolation of sample flow fields on the prediction of flow fields, and the requirements on distribution of sample flow fields are analyzed. Then, Choosing three-element airfoil as the study object, the prediction of flow fields on given state through the combination of POD with cubic spline interpolation and radial basis function interpolation is carried out. Finally, the prediction flow fields are compared with the flow fields obtained direct from CFD under the same state, and the properties of POD reduced-order model combined with those two interpolation method are showed respectively.

Key words: flow field prediction; proper orthogonal decomposition; cubic spline interpolation; radial basis function interpolation

0 引言

通常情况下,飞行器气动设计时,通过实验或者CFD计算来获得流场信息。由于影响流场分布的参数(马赫数、雷诺数、迎角等)很多,对于外形复

杂的飞行器,通过实验或者CFD计算来获取一条飞行轨迹上各个不同参数状态下的流场信息,付出的代价昂贵,且周期较长。工程中常用的做法是:通过实验或者CFD计算获得能包络飞行轨迹的一组流场作为采样流场,再通过插值方法可以得到飞行轨迹的任意参数状态的流场信息,例如升力系数、阻力系数、流场中某点的压力(或者密度等)数据^[1-2]。当只对单一参数或点进行估计时插值的次数较少,但若想要获得待估流场的全部信息,则需

要直接对所有网格点信息(设个数为 M)进行批量插值。这种批量数据插值过程的计算量大、计算密度较高、浮点运算复杂,导致计算速度慢,并且执行效率将随着采样点的增加而急剧降低^[3]。

通过本征正交分解(Proper Orthogonal Decomposition,简称 POD)方法^[4]获得采样流场信息的最优标准正交基(设阶数为 m , m 远小于 M),然后将采样流场中的每个流场信息投影到这组标准正交基上,获得每个流场在这组标准正交基上的投影系数。则插值对象由流场网格点上的信息转换为流场在各个标准正交基的投影系数,由 M 次插值减少为 m 次插值。将对流场点集的插值转换为对流场在正交基上投影系数的插值,能够大幅减小插值过程的计算量。

同时,由于 POD 方法本身所具有的降维特性,只需对包含绝大部分能量的前几阶正交基(模态)的投影系数进行插值,能够进一步减少计算量^[5]。POD 方法获得的正交基中占能量比例较大的正交基与总正交基的比例随着采样流场规模的增大而减少,因此这种方法对计算量的节省程度随着采样流场规模的增大而增大。

POD 方法结合插值方法的可靠性已经在诸多物理问题中得到了验证。T. Bui-Thanh 等^[6]应用 POD 结合三次样条插值方法对流场压力系数进行预测,在采样流场个数为 26 的情况下,使用前六阶 POD 基可以预测与 CFD 计算结果基本吻合的压力分布。Philippe Druault 等^[7]应用 POD 结合插值方法预测了内燃机循环周期内不同摆角下的气缸内流分布。王莺歌等^[8]通过风洞实验得出测点处的原始实验数据,应用 POD 结合插值方法预测风压场。

本文将 CFD 计算得到的采样流场数据,通过 POD 方法获得对应的标准正交基。通过选用不同个数的模态重构采样流场数据,并比较重构流场与原始采样流场,以确定合适的模态个数。在参数为一维情况下,利用三次样条插值和径向基插值对流场进行预测,将预测结果与相应的计算结果进行对比,来检验两种不同插值方法的预测效果。

1 流场预测方法的基本原理

1.1 本征正交分解

如果 $\{\varphi_i\} (i=1, \dots, L)$ 是某一组流场信息库

$\{U^j\} (j=1, \dots, M)$ 的基,则 $\{\varphi_i\}$ 可以表示为采样解的线性组合(式(1))。POD 方法的本质^[9]是寻找一组正交基函数 $\{\varphi_i\} (i=1, \dots, L)$ 来最大化式(2),式(2)的最大化问题可以转化为求解方程组(3),对方程组(3)左边的内积项进行整理,所求的系数满足方程组(4),求解方程组(4)得到式(1)中的系数 a_j^i ,继而得到 $\{\varphi_i\} (i=1, \dots, L)$,这里 φ_i 是按照对应特征值 λ_i 的大小排序的。

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^M a_j^i U^j \quad (1)$$

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |\langle U^j, \varphi_i \rangle|^2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \langle U^j(x) U^j(x'), a_k^i U^k(x') \rangle \\ & = \lambda_i a_j^i U^j(x) \quad (j=1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \langle U^j, U^k \rangle a_k^i = \lambda_i a_j^i \quad (j=1, 2, \dots, M) \quad (4)$$

采样流场中的任一流场都可以投影到彼此正交的 $\{\varphi_i\}$,并用下式表示:

$$U^j = \sum_{i=1}^L b_i^j \varphi_i \quad (5)$$

通过 POD 方法获得的正交集合 $\{\varphi_i\}$ 中前几阶基所占的“能量”较大,只需使用 $\{\varphi_i\}$ 中的前 d 阶基就可以以极小的误差重构出采样流场:

$$U^j = \sum_{i=1}^d b_i^j \varphi_i \quad (6)$$

对应的误差为

$$\epsilon^j = \sum_{i=d+1}^L b_i^j \varphi_i \quad (7)$$

这里有如下误差公式^[10]成立:

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^M \| \epsilon^j \|_{L^2}^2 = \sum_{i=d+1}^L \lambda_i \quad (8)$$

可以看出,当 d 阶之后的特征值总和很小时,该种降阶带来的误差很小。

1.2 流场预测

构建采样流场时决定流场差异的可变参数有迎角、马赫数、雷诺数和翼型的几何外形等。首先确定参数的变化范围,并在该范围内通过 CFD 计算求得一定数目的采样流场。根据式(5),对每个采样流场 U^j 向 POD 基投影,获得对应每组基的系数。若流场随参数的变化是连续的,则可以根据

插值方法,利用各参数状态下采样解的基系数,求得流场采样包络范围内的任意参数状态下的基系数,进而组合出相应的流场信息^[11]。假设可变参数是一维的,计算过程如下:①确定流场参数,并根据参数变化获得一组采样数据 $\{U^j\}$;②由采样数据 $\{U^j\}$ 计算 POD 基 $\{\varphi_i\}$;③用所求的基 $\{\varphi_i\}$ 表达采样解 $U^j = \sum_{i=1}^M b_i^j \varphi_i$ 。如果每个流场在第 i 个基上的投影系数是关于可变参数的连续函数,则可以利用插值方法,依据 $\{b_i^j\}$ 求得采样流场包络范围内任意一点所对应的第 i 个基的系数 b_i' 。则对应预测点的流场可以表示为 $U' = b_i' \varphi_i$ 。

1.3 预测的等价性

在通过采样流场求得的 POD 正交基满足各态遍历假设(由选定的 POD 正交基无差异地还原出每一个采样流场)条件下,可以证明 POD 结合插值方法与直接对采样流场进行插值的方法得到的预测结果是等价的。

具体推导过程如下:

假定插值方法为自由边界(边界处的一阶导数为 0)的三次样条插值方法,设流场采样个数为 $n+1$,采样流场信息的函数表达式为

$$U^j = u(x, \delta^j) \quad (6)$$

式中: x 为流场中的信息点; δ^j 为第 j 个流场采样的参数值。

对于某个具体的流场信息点 x_0 ,在各个流场采样处的值可以表示为 $U_0^j = U(x_0, \delta^j)$ 。通过三次样条插值,便可得到参数包络范围内任意 δ' 的流场信息点 x_0 的值 $U_0' = U(x_0, \delta')$ 。插值曲线 $\{U_0'\}$ 过所有 $\{U_0^j\}$ 并且满足关于 δ' 的一阶导数和二阶导数在整个包络区域都连续。由三次样条的唯一性可知满足这个条件的 $\{U_0'\}$ 存在且唯一,那么原命题的证明可以转换为证明:通过 POD 结合三次样条插值得到的 $\{U'\}$ 在任意 x_0 处也具有过所有 $\{U_0^j\}$ 并且满足关于 δ' 的一阶导数和二阶导数在整个包络区域都连续的性质。

对 $\{b_i^j\}$ 做三次样条插值可以得到任意 δ' 处的 b_i' , $\{b_i'\}$ 满足过所有 $\{b_i^j\}$ 并且满足关于 δ' 的一阶导数和二阶导数在整个包络区域都连续。由公式 $U' = b_i' \varphi_i$ 得到的 $\{U'\}$ 也具有过所有 $\{U_0^j\}$ 并且满足关于 δ' 的一阶导数和二阶导数在整个包络区域都连续的性质。

POD 结合插值方法与直接对采样流场进行插值的方法得到的预测结果是等价的,表明插值方法的精度决定流场预测结果的精度,同时插值方法的局限性,也将限制本文所述快速预测方法的适用范围。插值方法包括三次样条插值、径向基插值等,三次样条插值是常用的一维插值方法,径向基插值是一种多维散乱插值方法(一维也适用)。插值方法假设插值对象具有连续性质,因此,POD 结合插值方法在跨声速范围(流场在该区域随马赫数的变化存在间断特征)的流场插值结果的可靠性就无法保证。这也是文献[12]提到的“噪声”激波的真实根源。

2 流场信息的预测

2.1 采样流场

多段翼型的流场随来流方向(迎角)变化,流动特征变化明显。以 30P30N 三段翼为例,其缝翼处的流动涡核位置、各翼的表面压力分布随着迎角的变化而显著变化。因此,选择此翼型的流场(以迎角作为扰动参数)作为 POD 流场预测方法的研究对象。

计算网格采用 C 型网格,计算域半径为 15~20 倍翼型弦长,划分单元量约为 95 000 个。雷诺数约为 9×10^6 ,马赫数为 0.2,根据捕捉边界层足够精度的速度型的需求在翼型物面附近分布非常密的网格(第一层厚度约为 5×10^{-5} 倍弦长),翼型周围的网格分布如图 1 所示。湍流模型为 Spalart-Allmaras。基于压力修正的耦合算法,压力修正阶数为二阶,密度和动量的计算采用二阶的迎风格式,湍流粘度的计算采用一阶的迎风格式。求解方程的收敛准则设为连续方程的残差小于 10^{-5} 。

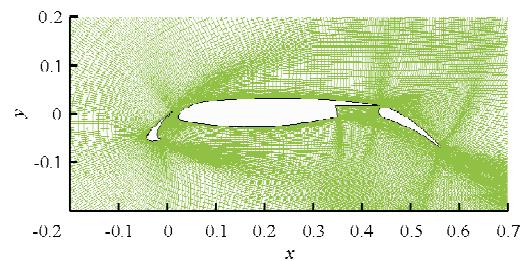


图 1 翼型周围网格分布

Fig. 1 Mesh around the airfoil

流场快速预测方法的数据信息来源是各个原

始采样流场,因此必须确保采样数据的可靠性。通过试算迎角为 -4° 、 0° 、 8° 、 16° 和 24° 的流场,最终确定选择的迎角采样点分布为 $0^{\circ}\sim24^{\circ}$,以 1° 为步长,共设置25个采样点,在该区间内流动现象明显且趋势较好,不存在流动分离等明显的间断现象。选择的预测点分布为 $3.5^{\circ}\sim21.5^{\circ}$,步长为2,共设置10个预测点。

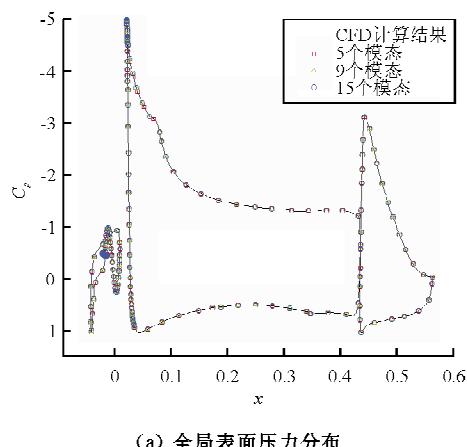
2.2 模态个数确定

POD方法的降阶特性表现在对原始采样提取出的标准正交基中,只使用占能量极大的那一部分模态来“表达”原始采样,能够有效地降低计算量。

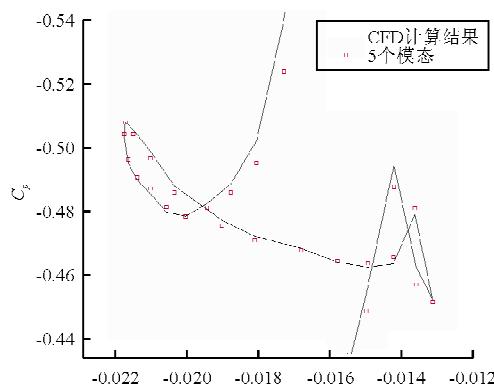
本算例中,采样流场个数为25,分别选取模态个数为5、9、15来重构流场(以 3° 流场作为对比位置)。从翼型表面压力分布和流场中旋涡的分布两个方面,将其与原始采样流场进行比较。

(1) 重构采样流场翼型表面的压力分布

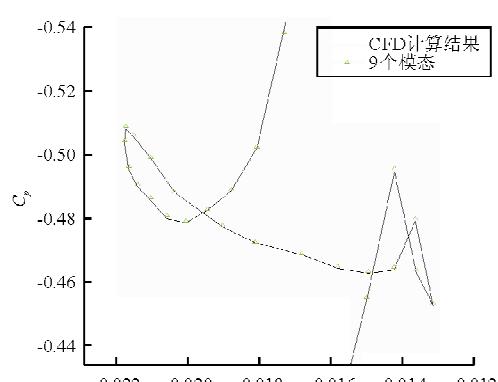
重构迎角为 3° 下的表面压力分布($x=-0.02$ 处是前缘缝翼的湾区转角处,是压力变化剧烈区域),其结果与计算结果的对比如图2所示。



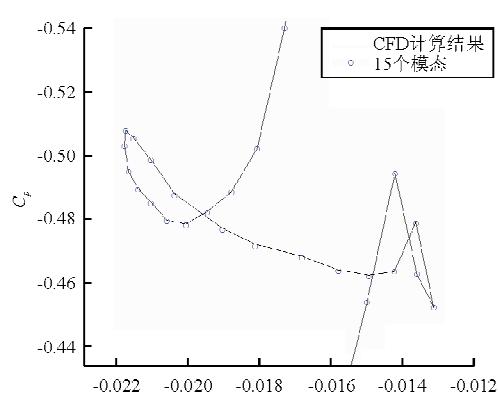
(a) 全局表面压力分布



(b) 局部表面压力分布,模态个数为 5



(c) 局部表面压力分布,模态个数为 9



(d) 局部表面压力分布,模态个数为 15

图2 表面压力分布重构结果与CFD计算结果对比
($\alpha=3^{\circ}, x=-0.02$)

Fig. 2 Comparison of pressure distribution between reconstruction result and CFD result($\alpha=3^{\circ}, x=-0.02$)

从图2可以看出:模态个数为5时,缝翼上重构的表面压力分布与原始的表面压力分布差异较大;模态个数为9和15时,重构得到的表面压力分布与原始的表面压力分布基本重合。

(2) 重构采样流场的涡旋

追踪迎角 3° 流场流线后发现原始流场前缘缝翼湾区存在两个涡旋。以坐标 $(-0.016, -0.048)$ 处的涡旋为例,不同模态个数下重构流场得到的涡旋与原始流场涡旋的对比如图3所示。可以看出:模态个数为5时,重构流场对涡核的捕捉能力较差;模态个数为9时,重构流场对涡核的捕捉能力较好;模态个数为15时,重构流场的涡核与原始流畅的涡核位置基本重合。

综上所述,模态个数为 5 时,重构流场捕捉到了采样流场中的主要特征,但是局部误差较大;模态个数为 9 时,局部误差明显减小了很多,但是对涡核的捕捉仍不够理想;模态个数为 15 时,重构流场与原始流场基本重合,此时 POD 基的个数只占到总采样数的 60%。

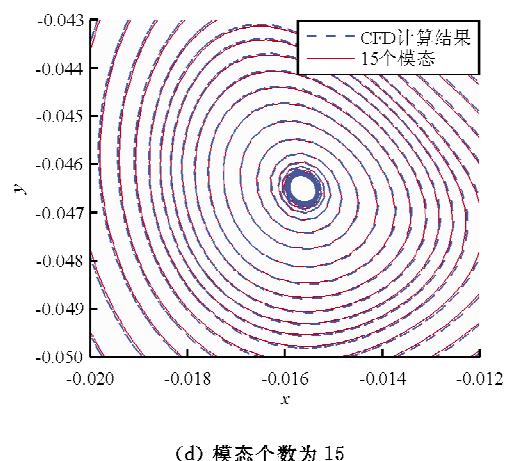
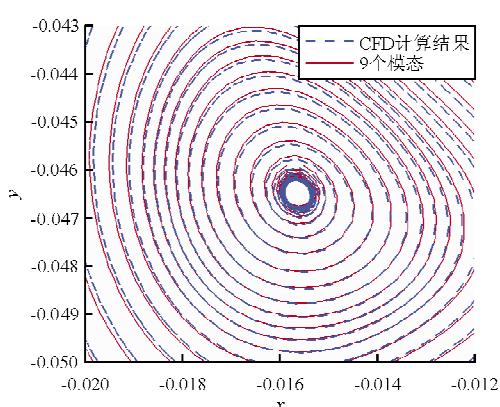
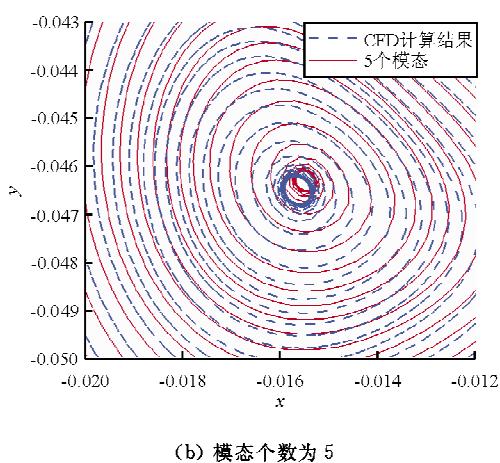
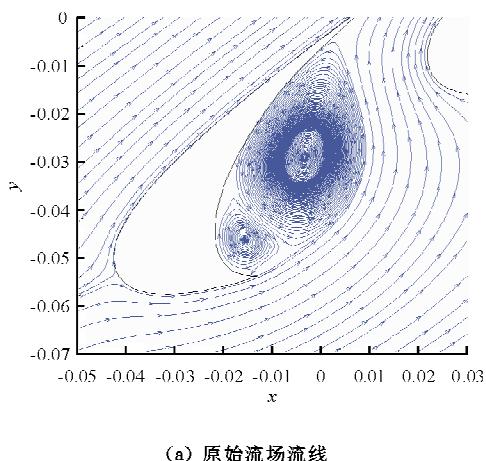


图 3 涡旋重构结果与 CFD 计算结果对比

$(\alpha=3^\circ, x=-0.016, y=-0.048)$

Fig. 3 Comparison of vortex distribution between reconstruction result and CFD result

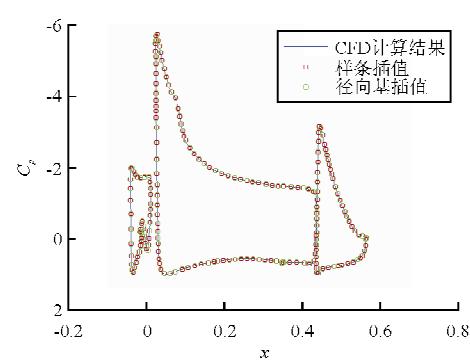
$(\alpha=3^\circ, x=-0.016, y=-0.048)$

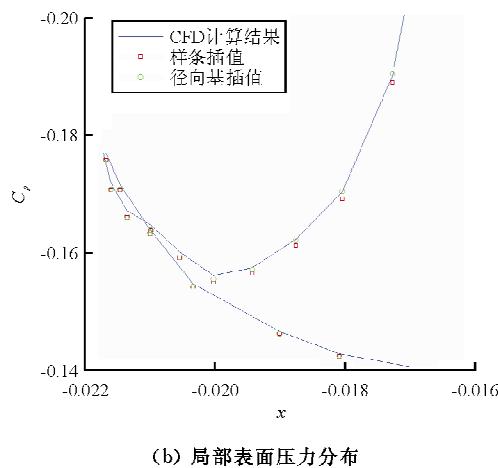
2.3 流场预测分析

在确定使用的 POD 基的个数为 15 后,以迎角作为参数,分别选用三次样条插值和径向基(薄板核)插值来预测 7.5° (采样中离此点最近的位置是 7° 和 8°)处的流场信息。

(1) 翼型表面的压力分布的预测结果

迎角 7.5° 处的翼型表面压力分布预测效果如图 4 所示。两种插值方法对翼型表面压力分布的预测结果与 CFD 计算结果吻合得很好。局部放大后,通过更加精细的比较,可以看出三次样条插值的预测结果要好于径向基插值的预测结果。

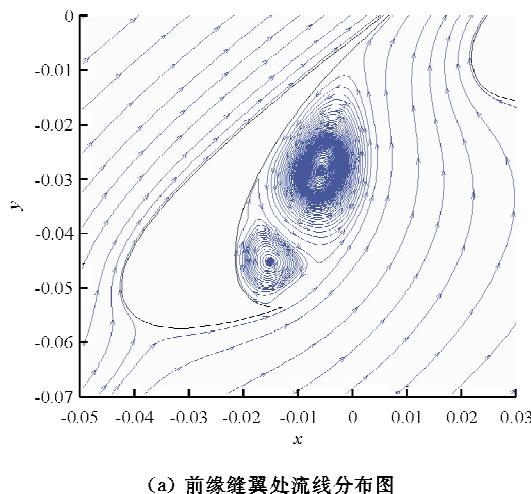




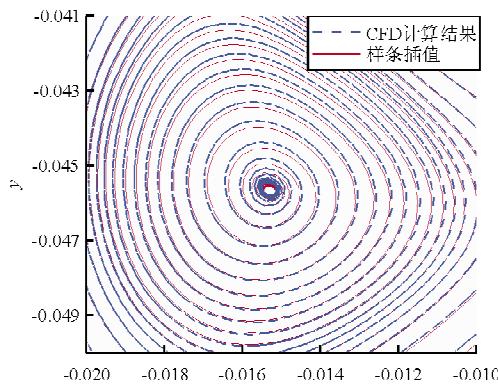
(b) 局部表面压力分布

图 4 POD 结合不同插值方法表面压力分布
预测结果对比($\alpha=7.5^\circ$)Fig. 4 Comparison of the POD prediction result on pressure distribution among different interpolation methods($\alpha=7.5^\circ$)

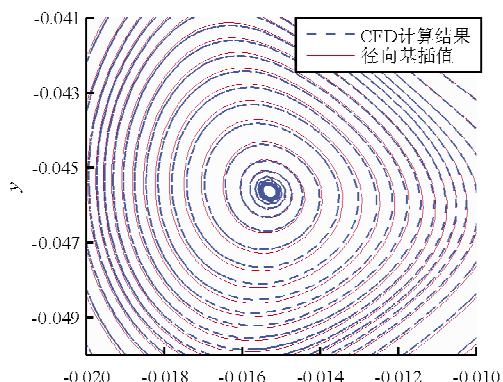
(2) 流场涡旋的预测结果

迎角 7.5° 时的涡核预测效果如图 5 所示。

(a) 前缘缝翼处流线分布图



(b) 三次样条插值的预测结果



(c) 径向基插值的预测结果

图 5 不同方法对涡旋预测结果的对比

 $(\alpha=7.5^\circ, x=-0.015, y=-0.046)$

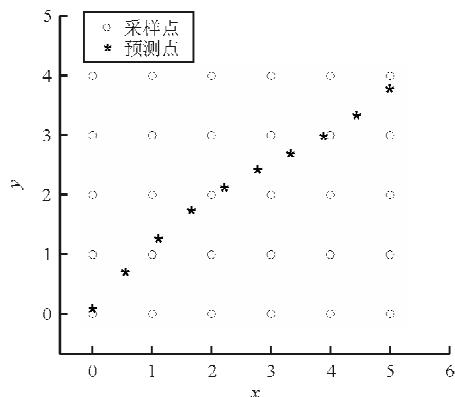
Fig. 5 Comparison of the POD prediction result on vortex distribution among different interpolation methods

 $(\alpha=7.5^\circ, x=-0.015, y=-0.046)$

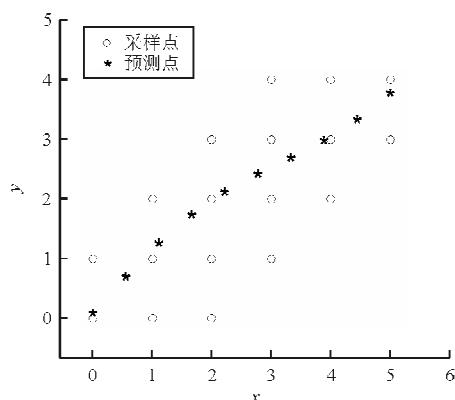
从图 5(a)可以看出,前缘缝翼湾区处存在两个明显的涡旋。将图 5(a)左下角的涡旋放大后如图 5(b)和 5(c)所示,两种插值方法预测结果都能很好地捕捉到涡核的位置,其中三次样条插值的预测效果略好。由于流线的追踪算法,具有对追踪过程中误差“累积”的效应,出现重合度不够理想的现象,但追踪趋势跟 CFD 计算结果是一致的。

通过 POD 结合插值方法得到的流场预测结果与对应的 CFD 计算结果重合程度很好,只有局部细微之处存在微小差异。对比两种插值方法,可以看出三次样条要略好于径向基插值的效果,但是二者的预测结果差异很小。从两种插值方法的适用范围来说:三次样条插值是一维插值方法,在流场状态参数个数大于 1 时,对采样分布要求较高;而径向基插值是一种多维散乱插值方法,它本质上将多维问题通过欧式距离转换为一维问题^[13],当流场状态参数增多时,它仍然具有与一维插值相同的适用性。两种插值方法对采样分布的要求如图 6 所示,图 6(a)对应于三次样条插值的采样分布(双向三次样条,需要正交分布的采样流场),图 6(b)对应于径向基插值的采样分布。径向基插值是一种散乱插值方法,对采样点的分布要求较低,当状态参数增加时,它使用的采样数目要比三次样条插值的少。而且径向基插值方法可以根据需要,

在任意采样位置增加采样。



(a) 三次样条插值的采样分布



(b) 径向基插值的采样分布

图 6 流场状态参数个数为 2 时,采样点的分布方式

Fig. 6 Sample distribution with two parameter

3 结 论

(1) 采用 POD 降阶模型,只需采用较少的几个表征主要模态的正交基就可以很好地重构出原始采样流场,表明 POD 降阶模型重构流场信息具有很高的计算效率。

(2) 采用 POD 降阶模型与插值方法结合,提取占能量较高的前几阶正交基,通过对目标状态处的各基系数插值,可以实现目标状态流场的快速预测。

(3) 流场预测精度取决于插值方法的精度以及采样流场的分布,对于单状态参数问题或者正交分布的采样流场的多状态参数问题,可以使用三次样条插值方法得到高精度的预测结果。对于多状态参数的问题,要得到正交分布的采样流场需要大

量的计算时间,可以通过散乱的采样流场分布,采用径向基插值方法实现流场的快速预测,具有很好的实际应用价值。

(4) POD 结合插值方法与直接对采样流场进行插值的方法得到的预测结果是等价的,因此插值方法的局限性以及采样流场的分布特性决定流场预测的精度。此外,三次样条插值与径向基插值等假设插值对象是连续的,因此,当流场信息随状态参数变化存在间断(如激波现象)时,流场预测结果在间断区域会产生较大的误差。

参 考 文 献

- [1] 李军伟,程咏梅,陈克皓,等.基于 AIWCPSO 算法的三次样条气动参数插值方法[J].控制与决策,2014,29(1):129-134.
Li Junwei, Cheng Yongmei, Chen Kezhe, et al. Cubic spline interpolation method of aerodynamic parameters based on AIWCPSO algorithm[J]. Control and Decision, 2014, 29(1): 129-134. (in Chinese)
- [2] 袁萃,杨青真,陈立海.飞行器特性曲线拟合与飞行仿真研究[J].计算机仿真,2008,25(2):53-56
Yuan Cui, Yang Qingzhen, Chen Lihai. Flight simulation and curve-fitting for the characteristics of aircraft[J]. Computer Simulation, 2008, 25(2): 53-56. (in Chinese)
- [3] 赵艳伟,程振林,董慧,等.方金云图形处理器空间插值并行算法的实现[J].中国图象图形学报,2012,17(4):575-581.
Zhao Yanwei, Cheng Zhenlin, Dong Hui, et al. Realization of GPU parallel spatial interpolation method[J]. Journal of Image and Graphics, 2012, 17(4): 575-581. (in Chinese)
- [4] Everson R, Sirovich L. The Karhunen-Loeve procedure for Gappy data[J]. Journal of the Optical Society of America A: Optics, Image Science, and Vision, 1995, 12: 1657-1664.
- [5] LeGresley Patrick A, Alonso Juan J. Dynamic domain decomposition and error correction for reduced order models [C]. AIAA-2003-0250, 2003.
- [6] Bui-Thanh T, Damodaran M. Aerodynamic data reconstruction and inverse design using proper orthogonal decomposition[J]. AIAA Journal, 2004, 42(8): 1505-1516.
- [7] Philippe Druault, Philippe Guibert, Franck Alizon. Use of proper orthogonal decomposition for time interpolation from PIV data[J]. Experiments in Fluids, 2005, 39(6): 1009-1023.
- [8] 王莺歌,李正农,宫博,等.定日镜表面风压的重构与预测[J].空气动力学学报,2009,27(5):586-591.
Wang Yingge, Li Zhengnong, Gong Bo, et al. Reconstruction & prediction of wind pressure on heliostat[J]. Acta

- Aerodynamica Sinica, 2009, 27(5): 586-591. (in Chinese)
- [9] 段焰辉, 蔡晋生, 刘秋洪. 基于代理模型方法的翼型优化设计[J]. 航空学报, 2011, 32(4): 617-627.
Duan Yanhui, Cai Jinsheng, Liu Qiuuhong. Surrogate model based optimization for airfoil design[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(4): 617-627. (in Chinese)
- [10] 杜娟. 流体力学方程基于 POD 方法的降维数值解法研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2011.
Du Juan. Redueed order modeling based on POD for fluid dynamic equation[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2011. (in Chinese)
- [11] 王敦华. 超高层建筑的风压场的重构与预测[D]. 北京: 北京交通大学, 2009.
Wang Dunhua. Reconstruction and prediction of wind pressure field for high-rise building[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2009. (in Chinese)
- [12] 邱亚松, 白俊强, 华俊. 基于本征正交分解和代理模型的流场预测方法[J]. 航空学报, 2013, 34(6): 1249-1260.
Qiu Yasong, Bai Junqiang, Hua Jun. Flow field estimation method based proper orthogonal decomposition and surrogate model[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(6): 1249-1260. (in Chinese)
- [13] 安治国. 径向基函数模型在板料成形工艺多目标优化设计中的应用[D]. 重庆: 重庆大学, 2009.
An Zhiguo. Application of radial basis function metamodel for optimization of sheet metal forming[D]. Chongqing: Chongqing University, 2009. (in Chinese)

作者简介:

罗杰(1989—),男,硕士研究生。主要研究方向:计算流体力学。

段焰辉(1985—),男。主要研究方向:计算流体力学、飞行器气动设计。

蔡晋生(1962—),男,教授,博导。主要研究方向:飞行器气动优化设计、计算流体力学、流动控制。

(编辑:赵毓梅)