

# 基于子结构法的大型结构数值敏度计算技术

张保, 孙秦

(西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

**摘要:** 针对大型结构直接精确敏度分析方法解方程规模大、求解时间长的问题, 发展一套基于有限元子结构法的处理技术。大型结构中, 数值敏度计算的伪载荷仅与涉及设计变量的结构单元有关, 因此存在大量零元的可能性。根据此特点通过节点重排将与设计变量有关的节点位移排到总位移列阵序的后面, 按重排后的顺序投放刚度矩阵, 然后对其进行区域分块, 并聚缩得到规模较小的矩阵。算例计算表明: 利用此矩阵求解结构位移场的导数, 不但保持了精确法的精度, 而且在优化设计的敏度计算中, 这些较小规模的数据又被多次使用, 从而显著提高计算效率。

**关键词:** 大型结构; 直接敏度方法; 伪载荷; 刚度矩阵; 子结构法; 节点重排序

中图分类号: V214.9

文献标识码: A

## A Substructure Sensitivity Method for Large-scale Structure

Zhang Bao, Sun Qin

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The common analytical sensitivity method for the large-scale structure takes a lot of time for solving the large-scale equations. To solve this problem the substructure sensitivity method is developed. In the large structure, the pseud load of the numerical sensitivity calculation has a lot of zeros, and the displacement components which are relevant to design variables may have non-zeros. The displacement components can be reordered behind through reordering the nodes, by which the stiffness matrix is assembled. Then the stiffness matrix is decompressed to smaller matrix using the substructure method (SM). The high accuracy of precise method can be kept by using these matrices to calculate the sensitivities of displacement. Meanwhile, these data can be used repeatedly in the optimization process, so the computational efficiency is improved greatly.

**Key words:** large-scale structure; direct sensitivity method; pseud load; stiffness matrix; substructure method (SM); node reordering

## 0 引言

敏度计算在优化设计、可靠性分析、设计变量重要性评估等方面起着至关重要的作用, 其作为一个重要的研究领域受到广大学者的关注, 已有大量文献对敏度计算方法作了详细的介绍<sup>[1-5]</sup>和应用研究<sup>[6-8]</sup>, 其中多数只针对小型结构采用直接法进行

论述, 鲜有针对大型结构的研究。随着航空工业的发展, 飞行器设计对结构的比强度、比刚度等提出了更加苛刻的要求, 这就需要对结构进行精细优化设计。现代航空结构复杂且庞大, 结构优化设计大多涉及多响应、多设计变量、多工况等问题。另外, 现代工业设计通常采用有限元进行结构分析, 由于精度要求需要对结构进行细化, 从而产生很大的计算量。综上所述, 数值敏度的直接法已经不能很好的满足现代飞行器设计对效率的要求, 需要进行必要的改进。

大型程序中比较成熟实用的敏度计算方法主要有有限差分法、伴随变量法和解析法。各个方法

收稿日期: 2014-06-09; 修回日期: 2014-09-06

基金项目: 中航工业“产学研”项目(CXY2010XG18)

通信作者: 张保, redgold\_zhang@163.com

具有不同的适应条件和优缺点。有限差分法<sup>[4,9]</sup>实施简单,但计算次数多、精度难以把握;伴随变量法<sup>[10-11]</sup>精度较高,但主要适用于响应较少、设计变量较多的情况,且很难处理组合响应(例如应力应变响应的问题);解析法<sup>[1,12-14]</sup>不但能保证精度,还能够适应多响应及组合响应的敏度问题,但其在设计变量较多、计算结构位移场导数时,需要多次求解大规模结构方程,这会严重影响计算效率。基于子结构方法的敏度分析国内最早由兆文忠等<sup>[15]</sup>应用于求位移敏度,将其应用于求结构敏度的文献<sup>[16-17]</sup>主要关注的是较小规模的问题。

在大型结构中,与每一设计变量相关的结构不是整个结构,而是整个结构的一部分,因此刚度矩阵关于这种设计变量的导数具有很强的稀疏性,导致拟载荷存在大量零元,拟载荷向量中只有与设计变量有关的位移分量中才存在非零元。本文主要利用上述特性,发展一套基于有限元子结构法的处理技术。该方法首先通过节点重排序实现区域分块,然后利用子结构法将这些矩阵聚缩成为小规模矩阵,利用这些小规模矩阵处理大型结构的敏度将极大地提高敏度分析效率,从而满足大型结构敏度分析的要求。

## 1 理论分析

### 1.1 直接敏度法

重要也是计算量最大的工作是获得位移场的敏度,静力结构分析的表达式为

$$K \frac{du}{dx_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial K}{\partial x_i} u \quad (1)$$

式中: $x_i$ 为第*i*个设计变量。

在大型结构设计中存在大量的设计变量,此时求解结构位移敏度场 $\left. \frac{du}{dx} \right|_{n \times m}$ ( $n$ 为系统方程的阶数,即 $K$ 阵的阶数; $m$ 为设计变量的个数),就需要求解 $m$ 个右端项的方程,是非常费时费力的工作。得到位移场的敏度,位移响应可以从位移场敏度直接获得,应力响应、应变响应和转角响应的敏度又可以由位移敏度获得。

以板的应变为例,板的应变<sup>[10]</sup>为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^m + z\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^m = \mathbf{B}_m \mathbf{u}_m^e \\ \boldsymbol{k} = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b^e \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ 为板单元的膜应变; $\boldsymbol{k}$ 为板弯曲率; $\mathbf{B}_m$ 为膜应变阵; $\mathbf{B}_b$ 为板弯曲的应变阵; $\mathbf{u}_m^e$ 为单元坐标系下面内位移; $\mathbf{u}_b^e$ 为单元坐标系下面外位移。

求板上表面应变关于某个设计变量的导数,以板中面为坐标参考面,上表面的应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_m \mathbf{u}_m^e + 0.5t \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b^e \quad (3)$$

在尺寸变量设计中,板的厚度通常作为设计变量,对于广义协调元厚度,弯曲应变函数为厚度的函数,即 $\mathbf{B}_b = \mathbf{B}_b(t)$ 。对当前板的应变响应求导数,根据设计变量是否为当前单元的厚度,可分为以下两种情况:

(1) 当求导变量是当前单元厚度时,应变的求导表达式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial x} \mathbf{u}_m + \mathbf{B}_m \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial x} + 0.5 \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b + 0.5t \frac{\partial \mathbf{B}_b}{\partial x} \mathbf{u}_b + \\ 0.5t \mathbf{B}_b \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

式中: $\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial x} = 0$ ;  $\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial x}$ 为单元位移场导数的面内部分和面外部分,它们是位移场敏度 $\frac{du}{dx}$ 在单元局部坐标系下的分量。

(2) 当求导变量不是当前单元的厚度时, $\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial x} = 0$ 、 $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$ 、 $\frac{\partial \mathbf{B}_b}{\partial x} = 0$ ,应变的求导表达式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial x} = \mathbf{B}_m \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial x} + 0.5t \mathbf{B}_b \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial x} \quad (5)$$

应力的导数由 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ 得到,应力敏度 $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial x}$ ,因为 $x$ 为尺寸变量,所以 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} = 0$ ,则应力导数为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x} = \mathbf{D} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial x} \quad (6)$$

### 1.2 子结构敏度法

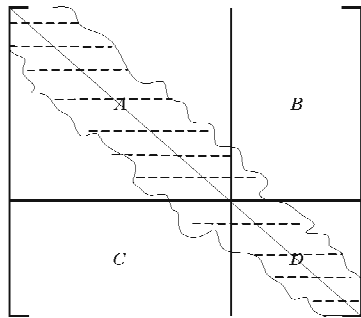
直接法计算结构敏度最大的计算量是计算式(1)所示的位移场导数,右端项在敏度分析中以结构载荷的形式施加到结构上,但又不是真实存在的

载荷,因而被称作伪载荷。由于每一设计变量只与结构中的一部分有关系,在伪载荷列阵中与设计变量有关的分量有数值,其他分量则为 0,故式(1)可以细化为如式(7)所示的形式。

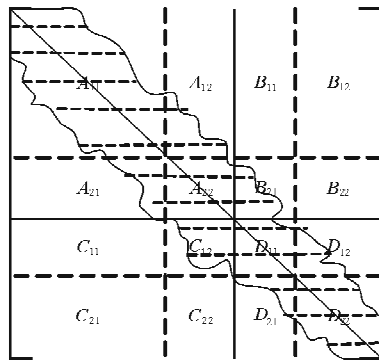
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(7)中与设计变量有关的位移敏度分量为  $x_2$ ,对应的伪载荷分量为  $\mathbf{P}$ ,与设计变量无关的位移敏度分量为  $x_1$ ,对应的伪载荷分量为 0。

$\mathbf{K}$  阵的分块如图 1(a)所示, $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{D}$  为稀疏方阵。还可以进一步将  $\mathbf{K}$  阵细化成如图 1(b)所示的形式, $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{22} = \mathbf{C}_{11} = \mathbf{C}_{21} = \mathbf{C}_{22} = 0$ , $\mathbf{B}_{21} = \mathbf{C}_{12}^T$ , $\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{21}^T$ 。



(a) 刚度矩阵分块



(b) 细化后的刚度矩阵分块

图 1 刚度矩阵  $\mathbf{K}$  的分块及细化

Fig. 1 Blocked and detailed of the stiffness matrix  $\mathbf{K}$

将式(7)展开得到

$$\begin{cases} \mathbf{A}x_1 + \mathbf{B}x_2 = 0 \\ \mathbf{C}x_1 + \mathbf{D}x_2 = \mathbf{P} \end{cases} \quad (8)$$

将  $x_1 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}x_2$  带入  $\mathbf{C}x_1 + \mathbf{D}x_2 = \mathbf{P}$ , 得到

$$[\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}]x_2 = \mathbf{P} \quad (9)$$

在大型结构分析中,由于  $\mathbf{K}$  阵是对称的,可以证明  $[\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}]^T = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ , 即  $\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  具有对称性。

由于求  $\mathbf{A}^{-1}$  的过程十分繁琐,令  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = y$ , 将此式转化为  $\mathbf{A}y = \mathbf{B}$ 。 $\mathbf{A}y = \mathbf{B}$  可以进一步展开为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

由右端项的形式可以反推得到  $y_{12}$ 、 $y_{22}$  为零,即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & 0 \\ y_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

此时,  $\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  又可以化解为

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & 0 \\ y_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{12}y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

将

$$y_{11} = -(\mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{A}_{12}y_{21} \quad (13)$$

带入

$$\mathbf{A}_{21}y_{11} + \mathbf{A}_{22}y_{21} = \mathbf{B}_{21} \quad (14)$$

得到

$$[\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}(\mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{A}_{12}]y_{21} = \mathbf{B}_{21} \quad (15)$$

式中:  $(\mathbf{A}_{21})^T = \mathbf{A}_{12}$ 。

为了求解式(15),同样令  $(\mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{A}_{12} = \mathbf{Z}$

得到

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{Z} = \mathbf{A}_{12} \quad (16)$$

解方程的过程为:首先通过式(16)得到  $\mathbf{Z}$  的值,然后带入式(15)得到  $y_{21}$  的值,将  $y_{21}$  带入式(13)得到  $y_{11}$ ,再将  $y_{11}$  带入式(12)得到  $\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ,通过式(9)得到  $x_2$ ,通过  $x_1 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}x_2$ ,进而得到完整的  $x$ 。

求解式(13)、式(15)和式(16)的过程中使用的是  $\mathbf{K}$  阵中的数据,而求解式(9)则用到刚度矩阵数组以外的右端项,所以对于大规模敏度分析,只需计算一次式(13)、式(15)、式(16)得到  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ,进而得到  $\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 。当存在多个右端项  $\mathbf{P}$  时,可以多次求解较小规模的方程(式(9)),从而有效提高计算效率。

## 2 节点排序

上述算法的基本前提是将刚度矩阵  $\mathbf{K}$  稀疏性分布为如图 1 所示的带状分布,在大型结构分析中,由于节点序具有较大的任意性,按初始节点排序投放的刚度矩阵一般不会满足此种带状分布,故该方法不再适用。为了适应这种方法,需要对投放的刚度矩阵的节点序进行重排。

网格节点分布如图 2 所示。

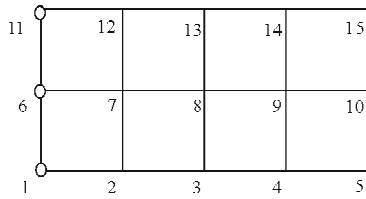
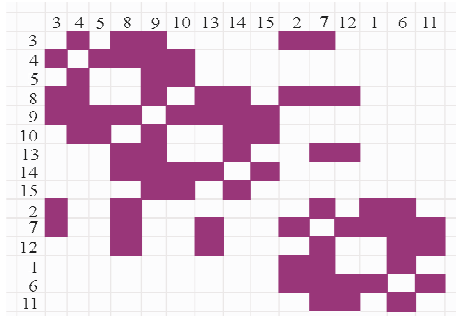


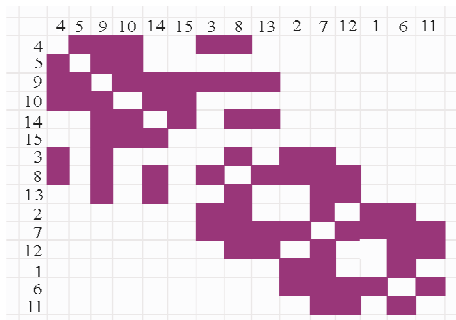
图 2 单元网格  
Fig. 2 Element mesh

假设(1,6,11)为与设计变量有关的节点,为了将刚度矩阵调整为带状分布结构(如图 1 所示),必须进行节点重新排序。首先将节点分为四大类:第一类为目标节点(1,6,11)(SET1);第二类为与目标节点有单元连接关系的节点(2,7,12)(SET2),称为耦合节点;第三类为与耦合节点有单元连接关系而与目标节点没有直接联系的节点(3,8,13)(SET3),称之为耦合节点的耦合节点;第四类为自由节点(4,5,9,10,14,15)(SET4)。

(1) 只考虑目标节点集 SET1 和耦合节点集 SET2 的影响,即将目标节点 SET1 排在投放序的最后面,然后接着排耦合节点集 SET2,得到的刚度矩阵的稀疏性分布如图 3(a)所示。



(a) 只考虑目标节点和耦合节点时刚度矩阵非零块分布



(b) 考虑目标节点、耦合节点及耦合节点的耦合节点时刚度矩阵非零块分布

图 3 刚度矩阵的稀疏性分布图

Fig. 3 Sparsity distribution of stiffness matrix

从图 3(a)可以看出: $B_{11}$  为非零块不满足图 1 所示的带状分布,此时刚度矩阵不能适用文中提出的聚缩方法。

(2) 考虑 SET1、SET2 和 SET3 的影响,即在节点排序中从后往前依次排放 SET1、SET2 和 SET3,得到刚度矩阵的稀疏性分布如图 3(b)所示,此时的刚度矩阵分布满足文中要求的带状分布,即  $B_{11} = B_{12} = B_{22} = C_{11} = C_{21} = C_{22} = 0$ 。

由此可知,在刚度矩阵投放时,节点排序按目标节点、耦合节点、耦合节点的耦合节点、其他节点或者逆序的方式排列,可以使刚度矩阵满足子结构法聚缩的带宽要求。

优化分析中敏度的计算流程如图 4 所示。

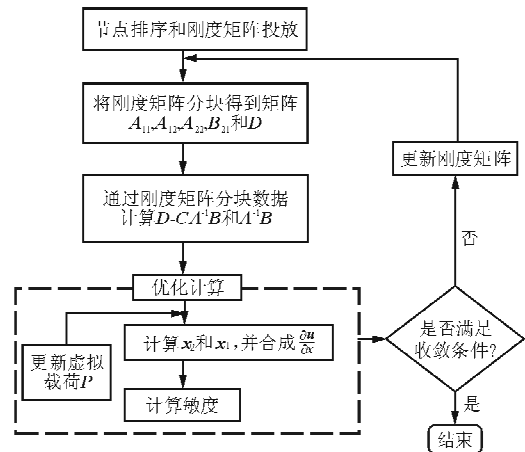


图 4 敏度计算流程

Fig. 4 Flow chart of sensitivity calculation

结合节点重排序和刚度矩阵分块,首先按照上述规则对节点进行排序并投放刚度矩阵,将刚度矩阵数据分块为  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{21}$  和  $D$ ,并聚缩得到矩阵  $D-CA^{-1}B$  和  $A^{-1}B$  并保留,释放其他数组,在敏度分析中只要结构不发生变化,这两个数组将一直有效。在优化计算敏度分析中,只要更新右端伪载荷项  $P$  就可以得到不同设计变量对应的位移场导数,从而获得各个响应的敏度。一个优化迭代步完成后,当满足优化停止要求,程序就自动停止,当不满足优化收敛条件时,需要更新刚度矩阵并按同样的方式再次计算敏度。

### 3 算例验证

#### 3.1 典型算例

算例所用板结构如图 5 所示,其长为 1 000

mm,宽为 600 mm,厚度为 2 mm;左端固定支撑,右端受到向上的均布载荷,大小为 0.001 N/mm。以各块的厚度为设计变量,设计变量的分布如图 5 中数字所示,响应值为右端中点的挠度,求此响应关于各变量的敏度。

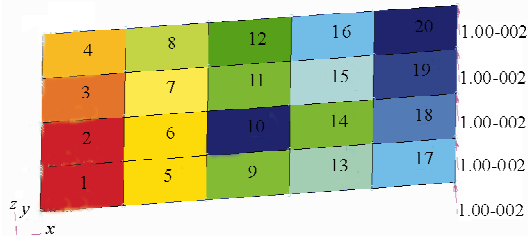


图 5 板结构变量分部

Fig. 5 Variables distribution of plate structure

有限元模型的网格尺度为 10 mm,节点数为 6 161,网格数为 6 000。有限元模型总刚度矩阵维数 36 600,非零元数为 989 184。通过两种方法对该模型进行敏度分析,由于两种方法计算的敏度结果完全一样,这里不再赘述,只对效率进行对比,效率对比结果如表 1 所示。

表 1 板结构直接方法与子结构法效率对比

Table 1 Comparisons of panel efficiency between direct method and substructure method

变量数/个	目标节点的比例/%	区域分块及聚缩的时间/s	本文方法/s	直接方法/s	效率提高率/%
1	7.5	7800.0	187.0	920.0	79.67
2	12.4	7 473.0	453.0	1 404.0	67.74
3	17.2	6 770.0	811.0	1 888.0	57.04
4	21.8	4 556.0	1 154.0	2 101.0	45.07
5	27.3	4 238.0	1 730.0	2 855.0	39.40
6	32.2	3 765.0	2 387.0	3 214.0	25.73
7	37.0	2 754.0	3 431.0	3 697.0	7.20
8	41.5	2 486.0	3 540.0	3 810.0	7.08

注:区域分块及聚缩的时间为从刚度矩阵分块到形成  $D-CA^{-1}B$  和  $A^{-1}B$  的时间。

### 3.2 大型 T 形尾翼敏度分析

T 型尾翼有限元模型如图 6 所示,网格节点总数为 4 708,单元数为 11 504,蒙皮采用复合材料,梁和肋采用钛合金。边界条件为根部固定支撑,平尾受到气动分析获得的节点力。对该结构进行敏度分析,设计变量为蒙皮上复合材料层合板的各层厚度。

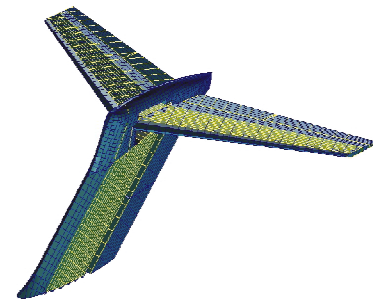


图 6 T 型尾翼有限元模型图

Fig. 6 Finite element model of T-wing

方程刚度矩阵的维数为 28 204,刚度矩阵的非零元数为 857 409,结构的位移响应数为 2,应变响应数为 40,求这些响应的敏度,两种方法的效率对比结果如表 2 所示。

表 2 T 尾结构直接方法与子结构法效率对比

Table 2 Comparisons of T-wing efficiency between direct method and substructure method

变量数/个	目标节点的比例/%	区域分块及聚缩的时间/s	本文方法/s	直接方法/s	效率提高率/%
100	5.00	263.96	15.00	21.01	28.61
200	11.01	213.03	23.96	31.97	25.05
300	15.95	164.04	31.97	44.04	27.41
400	21.01	112.99	48.05	56.00	15.05
500	25.02	124.00	59.00	66.01	10.62
600	28.96	187.95	85.03	96.04	11.46
700	30.03	110.99	90.97	98.04	7.25
800	41.98	82.02	104.03	106.99	2.77

### 3.3 算例分析

从表 1~表 2 可以看出,随着设计变量数量的增加,即目标节点所占比例的增加,矩阵区域分块及聚缩处理时间变得越来越短,而两种方法计算时间都相应的增长了。这是因为随着设计变量的增加,图 1 中 A 的规模变小导致聚缩矩阵分块时间变短,右端项个数增加导致两种方法计算时间变长,而随着 D 矩阵规模越来越接近整体刚度矩阵规模,导致两种方法的计算效率越来越接近。板结构的算例中,本文方法的优势更为明显,原因是板结构的节点数更多,总刚度矩阵维数更高,子结构法的优势更明显。

刚度矩阵的区域分块并聚缩过程消耗了较大计算量,且目标节点越少,消耗的时间越多,这是因

为A阵规模较大,处理的时间较多,而获得的数据较小,使得子结构方法的效率明显高于直接方法;反之,当目标节点较多时,聚缩过后的矩阵与直接方法的总矩阵较接近,此时子结构方法没有明显的优势。所以,子结构方法的适应条件为计算敏度次数较多而目标节点比例不太高的情况。

## 4 结 论

在大型结构敏度分析中,子结构方法通过节点排序使刚度矩阵满足带宽需要,通过刚度矩阵进行区域分块并聚缩,将大矩阵计算转化为较小规模矩阵,这虽然会占用较大的计算量,但利用聚缩完的数据计算敏度将会使分析效率明显高于常规方法,尤其是对敏度节点较少又要反复计算敏度的大型结构。另外,当敏度节点所占的比例较大或者计算敏度次数较多时,子结构方法的效率也高于直接方法。

### 参考文献

- [1] Keulen F V, Haftka R T, Kim N H. Review of options for structural design sensitivity analysis. Part 1: linear systems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(30/33): 3213-3243.
- [2] Adelman H M, Haftka R T. Sensitivity analysis of discrete structural systems[J]. *AIAA Journal*, 1986, 24(5): 823-832.
- [3] Chen Suhuan, Liang Ping, Han Wanzhi. A new method of sensitivity analysis of static responses for finite element systems[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1998, 29(3/4): 187-203.
- [4] Boer H D, Keulen F V. Refined semi-analytical design sensitivities[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37(46/47): 6961-6980.
- [5] Papadarakakis M, Lagaros N D, Tsompanakis Y. Large scale structural optimization: computational methods and optimization algorithms [J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2001, 8(3): 239-301.
- [6] 龙凯,左正兴.热结构稳态响应下的敏度分析方法和形状优化[J].*机械工程学报*,2007,43(8):72-76.  
Long Kai, Zuo Zhengxing. Sensitivity analysis method and shape optimization of thermo-structural steady response[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2007, 43(8): 72-76. (in Chinese)
- [7] 彭细荣,隋允康.频率响应位移幅值敏度分析的伴随法[J].*应用力学学报*,2008,25(2):247-253.  
Peng Xirong, Sui Yunkang. Sensitivity analysis for frequency response amplitude with adjoint method [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2008, 25(2): 247-253. (in Chinese)
- [8] 陈栋栋,张陆.钢管混凝土拱桥主拱优化设计中的敏度分析[J].*华东公路*,2012(3):45-48.  
Chen Dongdong, Zhang Lu. Sensitivity analysis in optimization design of the main arch for concrete filled steel tube arch bridge[J]. *East China Highway*, 2012(3): 45-48. (in Chinese)
- [9] Oral S. An improved semi-analytical method for sensitivity analysis[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1996, 11(1/2): 67-69.
- [10] Maenghyo C, Hyungi K. Improved semi-analytic sensitivity analysis combined with a higher order approximation scheme in the framework of adjoint variable method[J]. *Computers and Structures*, 2006, 84(29/30): 1827-1840.
- [11] Conceicao C A. Optimisation of geometrically non-linear composite structures based on load-displacement control [J]. *Composite Structures*, 1999, 46(4): 345-356.
- [12] Jasbir S A, Edward J H. Methods of design sensitivity analysis in structural optimization[J]. *AIAA Journal*, 1979, 17(9): 970-974.
- [13] Lund E, Olhoff N. Shape design sensitivity analysis of eigenvalues using "exact" numerical differentiation of finite element matrices[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1994, 8(1): 52-59.
- [14] Arora J S, Wang Q. Review of formulations for structural and mechanical system optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 30(4): 251-272.
- [15] 兆文忠,顾谦农,于连友.位移敏度分析的子结构法[J].*大连铁道学院学报*,1996,17(2):4-8.  
Zhao Wenzhong, Gu Qiannong, Yu Lianyou. Substructure method of displacement sensitivity analysis[J]. *Journal of Dalian Railway Institute*,1996,17(2):4-8. (in Chinese)
- [16] Elizabeth J B, Matthew S A. Sensitivity of two component mode synthesis methods applied to addition and subtraction of substructures [C]. 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Schaumburg, 2008: 7-10.
- [17] Zhu Hongping, Mao Ling. Calculation of dynamic response sensitivity to substructural damage identification under moving load[J]. *Advances in Structural Engineering*, 2013, 16(9): 1621-1625.

### 作者简介:

张保(1982-),男,博士研究生。主要研究方向:飞行器设计。

孙秦(1956-),男,博士,教授,博导。主要研究方向:飞行器结构设计。

(编辑:马文静)