

文章编号:1674-8190(2015)04-405-07

基于边界涡量流的二维叶型优化建模与求解

杨小娟,刘若阳,佘志坤

(北京航空航天大学 数学与系统科学学院,北京 100191)

摘要:针对二维叶片整体造型优化问题,提出一种基于边界涡量流的二维叶型优化模型,并对该模型进行求解。建立以含参数的 Bezier 曲线定义的二维叶型型线为边界、以边界涡量流正峰值的最小化为目标函数的优化模型,通过分析边界涡量流的生成机制,把叶型型线边界信息代入边界涡量流中,将边界涡量流用叶型型线参数和型线上的气动参数表示,进而获得新的目标函数表达式。该目标函数表达式可直接对叶型型线参数求导,仅使用简单的定步长梯度算法即可对优化模型求解。结果表明:优化后的叶型型线上的边界涡量流的正峰值显著降低。

关键词: 二维叶型;边界涡量流;Bezier 曲线;梯度算法

中图分类号: O224; V231.3

文献标识码: A

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.2015.04.002

Optimization Model and Solution of Two-dimensional Compressor Blade Based on Boundary Vorticity Flux

Yang Xiaojuan, Liu Ruoyang, She Zhikun

(School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Concerning the optimization of two-dimensional compressor blade, an optimization model based on boundary vorticity flux(BVF) is proposed and solved. An optimization model is established with the boundary being two-dimensional compressor blade defined by Bezier curve and the optimization target being the minimize of positive peak of BVF. Through the analysis of the BAV producing mechanism and taking the information of blade curve into BVF a new objective function can be obtained. The new objective function can directly get partial derivatives of the parameters of blade curve, which make the simple gradient arithmetic being used to solve the optimization model. The optimization experiment shows that the positive peak of boundary vorticity flux is effectively decreasing in this process.

Key words: two-dimensional compressor blade; boundary vorticity flux; Bezier curve; gradient algorithm

0 引言

压气机作为航空发动机的核心部件之一,其发展一直备受关注,目前,关于压气机的设计已经形成较为完整的设计理论,并且还在不断地改进和完善。压气机设计分为方案设计、技术设计和工程图设计^[1]。压气机气动设计是技术设计流程中的核

心设计,主要分为四个阶段:子午面通流图的确定、子午面(或 S2m 流面)上气动参数的计算、按照上一阶段的计算结果进行叶片造型、根据子午面通流图及叶片型线进行流场的数值分析和验证。

二维叶片造型优化是设计流程中叶片造型的重要组成部分,是三维叶片造型的简化模型及理论基础,为三维叶片造型的研究提供了新思路。G. R. Frost 等^[2]开发出了基于任意中弧线基元的叶片造型程序,其设计流程为构造角—中弧线—基元叶型—叶片,该流程仍为现在主流叶片造型流程。随着科技的发展,Bezier 函数等逐渐被用于叶片直接造型^[3],不再仅仅通过中弧线来间接定义基元叶

收稿日期:2015-08-21; 修回日期:2015-10-02

基金项目:国家自然科学基金(11290140)

通信作者:杨小娟,xiaojuan_yk@163.com

型,但三维叶片直接造型的优化成为一大难题,使得二维直接造型的优化成为研究热点。

在二维直接造型的优化中,金东海等^[4]提出了混合遗传算法,突出了该算法的广泛应用性且适用于叶片造型的优化,然而并未对二维直接造型优化问题提出优化理论。尚仁操等^[5]提出利用多目标遗传算法和序列二次算法组合的优化算法,通过调节吸力面和压力面的关键控制点参数对其压力损失和转折角进行优化。

另一方面,基于中弧线的叶片造型优化,吴宏等^[6]以边界涡量流 BVF (Boundary Vorticity Flux)的轴向力矩为目标函数,通过梯度优化算法得到优化算法,并进行了 BVF 的诊断分析。该方法虽然未建立中弧线参数与目标函数的直接关系,但仍具有很强的研究价值。

本文重点研究二维直接造型叶片的优化问题。二维叶型由含参数的 Bezier 曲线定义,以边界涡量流(BVF)的正峰值的最小化为目标函数的优化模型,通过分析 BVF 的生成机制,把边界叶型型线信息代入边界涡量流中,使边界涡量流由叶型型线参数和型线上的气动参数构成,得到新的目标函数表达式,从而得到新的优化模型。新的优化模型中目标函数表达式可直接对叶型型线参数求导,使得使用简单的定步长梯度算法即可对优化模型进行求解。

1 叶型参数化的表达

将二维叶型分为四部分:前缘、尾缘、压力面型线和吸力面型线,如图 1 所示。为保证叶型进出口构造角(由通流设计算得)与设计值保持一致,固定前尾缘小圆的形状,仅针对叶型压力面型线和吸力面型线进行参数化表达。

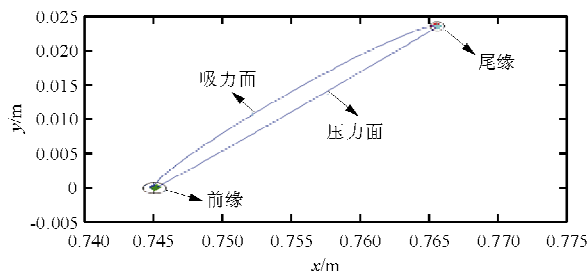


图1 二维叶型

Fig. 1 Two-dimensional compressor blade

压力面型线和吸力面型线利用含参数的三次 Bezier 函数^[7-9]定义。Bezier 函数定义的 Bezier 曲线具有控制点少、保凸性等特点,被广泛应用于叶片造型中。

压力面型线和吸力面型线的定义形式和过程相同,以吸力面型线定义为例进行介绍。

三次 Bezier 曲线需要四个控制点,为保证叶型光滑且一阶光滑,选取的控制点为:前尾缘与吸力面型线相接的两端点 P_0 、 P_3 ;前尾缘与吸力面型线相接处切线方向上的任意两点 P_1 、 P_2 。 P_0 、 P_1 的选取如图 2 所示。

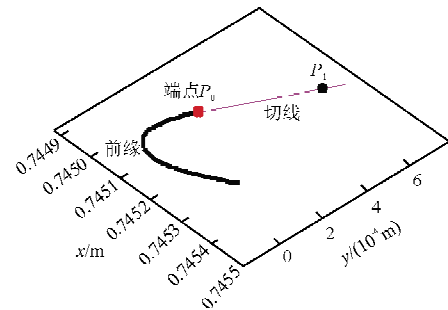


图2 控制点 P_0 、 P_1

Fig. 2 Control point P_0 and P_1

三次 Bezier 曲线的表达式为

$$Q(t) = P_0(1-t)^3 + 3P_1(1-t)^2t + 3P_2(1-t)t^2 + P_3t^3 \quad (1)$$

式中: $t \in [0, 1]$ 。

P_1 、 P_2 为其切线方向上的任意点,不同的选取方式可得到不同的 Bezier 曲线,故可添加参数 a 、 b 。含参数的吸力面型线表达式为

$$f(t) = P_0(1-t)^3 + 3[a(P_1 - P_0) + P_0] \cdot (1-t)^2t + 3[b(P_2 - P_3) + P_3] \cdot (1-t)t^2 + P_3t^3 \quad (2)$$

同理,可定义压力面型线含参数 c 、 d 的三次 Bezier 函数。

2 二维叶型的优化模型与求解流程

从以边界涡量流(BVF)^[10-13]的物理表达式为优化目标表达式的优化模型出发,首先,建立叶型坐标系,并在此坐标系下分析 BVF 的生成机制,得到 BVF 在此坐标系下的表达式;然后,建立固定的直角坐标系,利用叶型坐标系与直角坐标系的转换

关系,求得 BVF 在直角坐标系中的表达式,该表达式由叶型型线参数和型线上的气动参数构成,即为新的目标函数表达式;最后,利用新的目标函数表达式可对叶型型线参数求导这一性质,选取简单的定步长梯度算法求解优化模型,建立优化求解流程。

涡量是一个描述旋涡运动的物理量,指流体速度的旋度 $\text{rot } V$ 。边界涡量流(BVF)为流体边界处的涡量,其值 σ 为壁面涡量的法向梯度与运动粘性系数的乘积:

$$\sigma = \nu(\mathbf{n} \cdot \nabla \omega) \quad (3)$$

式中: σ 为边界涡量流的值; ν 为运动粘性系数; ω 为涡量; \mathbf{n} 为壁面流体外法向(指向壁面)。

在叶片造型中,希望流体微元沿着叶型型线移动,而非垂直于壁面旋转且偏离压气机旋转轴运动,即在叶型设计中 BVF 的正峰值越小越好。故优化目标表达式为

$$\min[\max \nu(\mathbf{n} \cdot \nabla \omega)] \quad (4)$$

对于二维叶型,建立叶型坐标系 (s, \mathbf{n}, z) , s 为沿叶型型线顺时针方向的切向量, \mathbf{n} 为壁面流体外法向量, z 为垂直纸面朝外方向。叶型坐标系如图 3 所示。

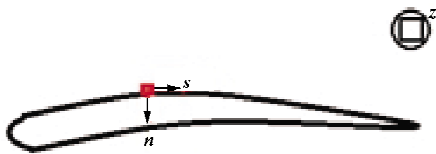


图 3 叶型坐标系

Fig. 3 Coordinate system of compressor blade

在叶型坐标系下,式(3)展开为

$$\sigma = \nu(\mathbf{n} \times \nabla) \times \omega - \nu \mathbf{n} \times (\nabla \times \omega) \quad (5)$$

对于雷诺数远远大于 1 的流动,在量级上式(5)右侧第一部分完全可以忽略,故可简化为

$$\sigma = -\nu \mathbf{n} \times (\nabla \times \omega) \quad (6)$$

结合壁面上的动量方程 $\frac{1}{\rho} \nabla p = -\nu \nabla \times \omega$, 式(6)变化为

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \mathbf{n} \times \nabla p \quad (7)$$

又因为 $\mathbf{n} \times \nabla = \mathbf{n} \times \left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + s \frac{\partial}{\partial s} \right) = \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial s}$, 式

(7)可写为

$$\sigma = \mathbf{e}_z \frac{\partial p}{\rho \partial s} \quad (8)$$

式中: \mathbf{e}_z 为叶型坐标系中垂直纸面朝外方向的单位向量; p 为压强; ρ 为密度。

式(8)表明边界涡量流(BVF)由压力梯度产生。式(5)~式(8)的推导过程即为 BVF 的生成机制^[14-15],可简单描述为:壁面处的流体微元是无滑移的,当微元一侧压力大于另一侧压力,粘附条件使该壁面处流体球不能平移,只能滚动,在流体内形成涡量。

式(7)表示 BVF 沿 z 方向移动。对于二维叶型(叶片的横截面),垂直纸面朝外方向的 z 方向代表远离压气机旋转轴的方向。边界涡量为矢量,由于只存在于 z 方向上,在下文的推导和计算中,将其看作标量。当 BVF 为正值时,壁面微元向 z 轴向外方向移动;当 BVF 为负时,壁面微元向 z 轴向内方向移动。显然,BVF 的正峰值越小越好。

结合上述分析及式(8),优化模型的优化目标由式(4)变化为

$$\min\left(\max \frac{\partial p}{\rho \partial s}\right) \quad (9)$$

流体在压气机中运动,压气机叶片吸力面壁面上流体微元的密度是非均匀变化的,不利于求得 BVF 的值。考虑到叶型壁面上的压强与贴近壁面流面上的压强近似相等,将式(9)中壁面上的压强近似看作贴近壁面流线上的压强。

该流线上切线方向上的动量方程为

$$\frac{\partial p}{\rho \partial s} = \frac{dV_s}{dt} \quad (10)$$

在压气机气动设计中,流体被假设为定常、无粘且绝热的。对于定常流,流线上气动参数 V 满足:

$$\frac{dV_s}{dt} = V_s \frac{dV_s}{ds} \quad (11)$$

将式(10)、式(11)代入式(8)中,得

$$\sigma = V_s \frac{dV_s}{ds} \quad (12)$$

结合式(4),优化模型的优化目标由式(9)变化为

$$\min\left(\max V_s \frac{dV_s}{ds}\right) \quad (13)$$

优化过程中,以式(13)为优化目标对整个叶型进行优化,考虑到叶型的吸力面和压力面的 BVF 值相差较大,且对于每一个叶型型线都可求 BVF 值,故将对整个叶型的优化目标转化为对压力面型线上 BVF 的正峰值最小化和对吸力面型线上 BVF 的正峰值最小化。由于压力面型线、吸力面型线的表达式及两型线上目标函数的相同性,以吸力面为例,阐述 BVF 如何由型线参数和型线上的气动参数定义。为方便起见,下文中吸力面型线上的目标表达式依然用式(13)表示。

建立直角坐标系 (x, y, z) , 直角坐标系 (x, y, z) 与叶型坐标系 (s, n, z) 的转化关系为

$$\begin{bmatrix} ds \\ dn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中: β 为每一点处方向导 ds 与 dx 的夹角。

定义 dL 为矢量 ds 对应的标量值,即 dL 为型线微弧长(在吸力面型线上 ds 方向与 dL 方向默认相同,在压力面型线上 ds 方向与 dL 方向默认相反),即

$$dL = ds \quad (15)$$

根据直角坐标系和叶型坐标系的转化关系:

$$ds = \frac{dx}{\cos\beta} = \frac{dy}{\sin\beta} \quad (16)$$

推得

$$dL = \frac{dx}{\cos\beta} = \frac{dy}{\sin\beta} \quad (17)$$

由于 L 为型线弧长,式(17)表明在直角坐标系 (x, y, z) 中, β 为型线上每一点处的倾斜角。

在定常流中,流线上气动参数 V 满足:

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} \\ V_y = \frac{dy}{dt} \\ V_s = \frac{ds}{dt} \\ V_n = \frac{dn}{dt} \end{cases} \quad (18)$$

对于相同 dt ,式(14)可化为

$$\begin{bmatrix} V_s \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \quad (19)$$

联立式(12)、式(14)及式(19),可得

$$\sigma = V_x \frac{dV_x}{dx} \quad (20)$$

展开得

$$\sigma = \frac{V_x}{\cos\beta} \frac{dV_x}{dx} - (1 + \tan^2\beta) V_x^2 \frac{d\cos\beta}{dx} \quad (21)$$

式中: V_x 为紧贴近壁面处流体微元的 x 轴方向的速度; β 为吸力面型线上每一点处的倾斜角。

根据型线表达式(式(2))可求出 $\tan\beta$ 和 $\cos\beta$,即

$$\begin{cases} \tan\beta = \frac{dy}{dx} \\ \cos\beta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \end{cases} \quad (22)$$

式中: dx, dy 为型线函数的微分,通过式(2)便可求得,且 dx, dy 是关于 a, b, t 的函数。

将求得的 dx, dy 代入式(22)中,再代入式(21)中,得

$$\sigma = F(a, b, t) \quad (23)$$

式(23)为由吸力面型线参数和型线上的气动参数定义的 BVF 表达式,即新的优化目标表达式。

式(23)中的 t 是型线表达式(式(2))的自变量,故型线上的 BVF 的正峰值为

$$\max_{t \in [0, 1]} F(a, b, t) \quad (24)$$

综上所述,优化模型中吸力面型线的优化目标最终变为

$$\min_{(a, b)} [\max_{t \in [0, 1]} F(a, b, t)] \quad (25)$$

同理可得,压力面型线上的 BVF 的正峰值为

$$\max_{t \in [0, 1]} F(c, d, t) \quad (26)$$

压力面型线的优化目标为

$$\min_{(c, d)} [\max_{t \in [0, 1]} F(c, d, t)] \quad (27)$$

由于叶型是由吸力面型线、压力面型线和前尾缘构成的,在叶型优化过程中,对以式(25)为目标的吸力面型线优化和以式(27)为目标的压力面型线优化同时进行优化求解。

对优化目标式(25)和式(27),可分别求得吸力面型线上的式(24)和压力面型线上的式(26),且这两个式子可分别对参数 a, b 和 c, d 求偏导,通过定步长梯度优化算法求解此优化模型。优化求解的具体流程如图4所示,其中流场计算采用二维粘性 CFD 程序。

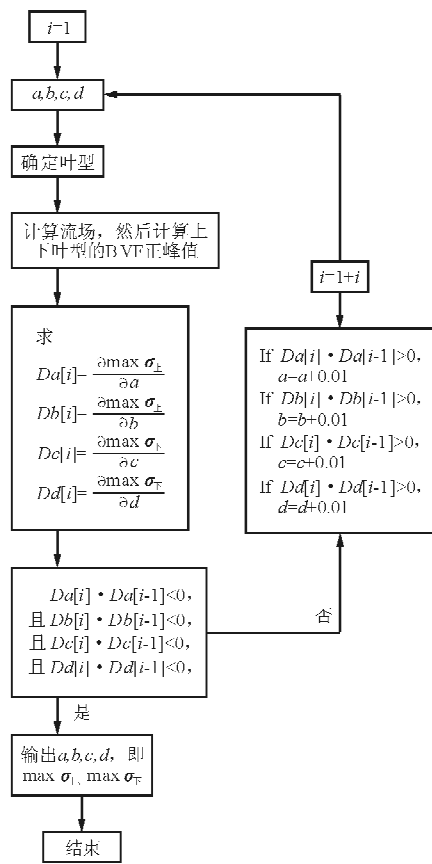


图 4 优化求解流程图

Fig. 4 Flow chart of optimized solution

3 数值算例及结果分析

将以边界涡量正峰值最小化为目标的优化模型和求解流程用于二维叶栅的计算模型中,二维叶栅模型如图 5 所示。

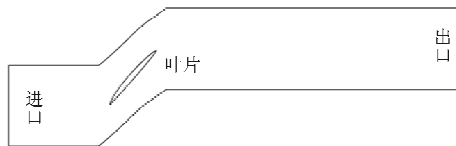


图 5 二维叶栅模型

Fig. 5 Two-dimensional cascade model

二维叶型采用亚音叶型,进口距叶型前缘约 1.5 倍弦长,出口距叶型尾缘约 4 倍弦长,叶栅栅距 35.40 mm,模型为单通道叶栅模型,通道两侧为平移周期性边界条件,叶片为无滑移壁面边界条件。二维叶型的基本参数为:弦长 31.59 mm,进口构造角 59.67°,出口构造角 37.53°。模型进口为总温总压进口,给定总温 288.15 K,给定进口气

流角,保证气流进口的攻角为 5°,并给定合适总压,保证进口马赫数为 0.42。模型出口为静压出口,静压为大气压 101 325 Pa。

本文通过 Numeca/Autogrid5 软件进行叶栅的网格划分,单通道总网格数约 7 万,检验所得 y^+ 值小于 5,达到计算精度的要求。使用 Ansys/CFX14.5 软件进行定常数值计算,采用 $k-\epsilon$ 湍流模型。

为保证叶型进出口构造角与设计值一致,将前尾缘固定,固定点的坐标如表 1~表 2 所示。

表 1 前缘固定点坐标

Table 1 Coordinate of leading edge fixed point

序号	前缘		序号	前缘	
	x	y		x	y
1	0.745 057	0.000 000	16	0.745 057	0.000 000
2	0.745 101	-0.000 008	17	0.745 028	0.000 035
3	0.745 124	-0.000 003	18	0.745 022	0.000 057
4	0.745 143	0.000 005	19	0.745 019	0.000 077
5	0.745 160	0.000 013	20	0.745 018	0.000 096
6	0.745 175	0.000 022	21	0.745 018	0.000 114
7	0.745 190	0.000 032	22	0.745 019	0.000 132
8	0.745 204	0.000 042	23	0.745 021	0.000 149
9	0.745 218	0.000 052	24	0.745 024	0.000 166
10	0.745 231	0.000 063	25	0.745 027	0.000 183
11	0.745 243	0.000 074	26	0.745 030	0.000 199
12	0.745 255	0.000 085	27	0.745 034	0.000 215
13	0.745 267	0.000 096	28	0.745 038	0.000 231
14	0.745 279	0.000 107	29	0.745 043	0.000 247
15	0.745 290	0.000 119	30	0.745 047	0.000 262

表 2 尾缘固定点坐标

Table 2 Coordinate of trailing edge fixed point

序号	尾缘		序号	尾缘	
	x	y		x	y
1	0.765 667	0.023 567	10	0.765 509	0.023 758
2	0.765 675	0.023 582	11	0.765 525	0.023 763
3	0.765 683	0.023 597	12	0.765 542	0.023 768
4	0.765 690	0.023 613	13	0.765 560	0.023 771
5	0.765 697	0.023 630	14	0.765 579	0.023 773
6	0.765 702	0.023 648	15	0.765 598	0.023 774
7	0.765 706	0.023 669	16	0.765 620	0.023 773
8	0.765 706	0.023 693	17	0.765 645	0.023 768
9	0.765 688	0.023 740	18	0.765 688	0.023 740

吸力面型线可由含参数 a, b 的 Bezier 曲线表

示,同理,压力面型线可由含参数 c, d 的 Bezier 曲线表示。通过优化参数 a, b, c, d 得到最优的二维叶型,优化过程如图 4 所示。

优化求解过程中, BVF 的计算点均匀分布在叶型压力面型线和吸力面型线上,共 2 000 个点,并依次记录其顺序。

通过优化,叶型参数和 BVF 的正峰值变化如表 3 所示。

表 3 叶型优化结果对比

Table 3 The results comparison of blade before and after optimization

对比项	参数值	
	初始叶型	优化叶型
(a, b, c, d)	$(0.5, 0.5, 1, 1)$	$(0.35, 0.55, 1, 0.15)$
$\max \sigma_{吸}$	2.61×10^7	8.52×10^6
K	2	4
$\max \sigma_{压}$	5.50×10^7	2.83×10^6
L	2	4

注: K, L 为 $\max \sigma_{吸}, \max \sigma_{压}$ 对应点的顺序。

从表 3 可以看出:吸力面的 BVF 的正峰值优化后为优化前的 32%,压力面的 BVF 的正峰值优化后为优化前的 50%,并且 BVF 的正峰值稍向后偏移。

优化后,叶型的整体 BVF 的正峰值有效降低,如图 6 所示。

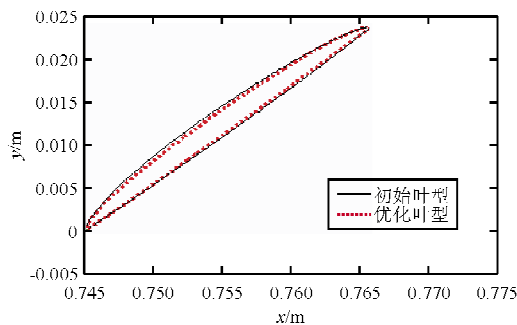
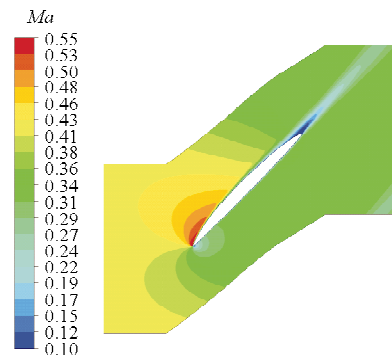


图 6 叶型的整体 BVF 的正峰值的变化

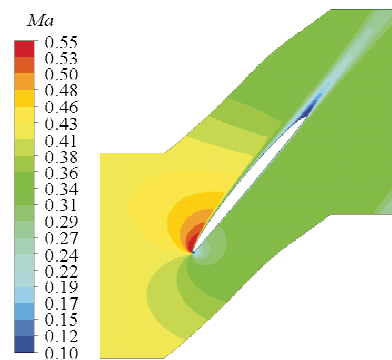
Fig. 6 The change of positive peak of blade's whole BVF

从图 6 可以看出,初始叶型与优化叶型对应点的最大距离差约为 0.001 m,相当于弦长 31.59 mm 的 1/30。

S2 流面马赫数分布如图 7 所示。由于气流在叶背的加速作用,叶背前缘附近有明显的高马赫数区域存在。



(a) 初始叶型



(b) 优化叶型

图 7 S2 流面马赫数分布

Fig. 7 Mach number distribution of S2

从图 7 可以看出,优化后,叶背附近的高马赫数区域的强度略大于初始叶型,优化后气流在前缘叶背附近的速度更高。

叶型表面压力分布如图 8 所示。

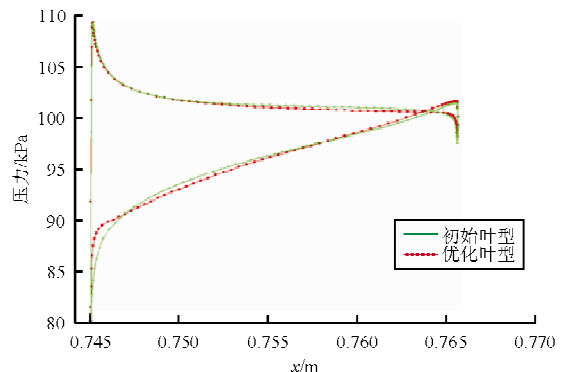


图 8 叶型表面压力分布

Fig. 8 Pressure distribution of blade surface

从图 8 可以看出,优化前后叶型表面压力分布变化不大,但在前缘附近,优化后的叶背压力差略大于初始叶型,原因是叶盆、叶背的压力差大小反映了叶型负荷的大小,表现出优化后前缘附近负荷

有所提升。

图7~图8表明优化后叶片变薄,整体BVF的正峰值有效降低,前缘吸力面的加速作用更加明显。但优化前后叶型形状差别较小,马赫数分布和压力分布也变化不大,该优化工作还有待深入进行。

4 结 论

本文以BVF的物理表达式为优化目标的模型,通过分析叶片和BVF的关系,得到由叶型参数和气动参数构成的新表达式。

新表达式能直接对叶型参数求导,使得优化算法变得简单、优化过程更加直观,采用简单的定步长梯度算法就可优化,不再局限于采用遗传算法或更复杂的优化算法。

该优化模型对于叶片参数化表达形式具有普适适用性,本文以Bezier函数定义叶片表达式,也可以采用多项式等定义。

参考文献

- [1] 《航空发动机设计手册》总编委会. 航空发动机设计手册——第8册:压气机[M]. 北京:航空工业出版社,2000. General Editorial Board of *Aero-engine design manual*. *Aero-engine design manual—Vol. 8: Compressor*[M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2000. (in Chinese)
- [2] Frost G R, Wennerstrom A J. The design of axial compressor airfoils using arbitrary camber lines[R]. Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, ARL 73-0107, AD 765165, Ohio, 1973.
- [3] 阮劲松,王春林,袁春元,等. 基于Bezier函数的混流泵叶片造型研究[J]. 农机化研究, 2005(6): 104-105,108. Ruan Jinsong, Wang Chunlin, Yuan Chunyuan, et al. Study on surface modeling of the blade of mixed-flow pump based on Bezier function[J]. *Journal of Agricultural Mechanization Research*, 2005(6): 104-105,108. (in Chinese)
- [4] 金东海,桂幸民. 混合遗传算法的研究及其在压气机叶型优化设计中的应用[J]. 航空学报, 2006, 27(1): 29-32. Jin Donghai, Gui Xingmin. Design optimization of compressor blades by hybrid genetic algorithm[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2006, 27(1): 29-32. (in Chinese)
- [5] 尚仁操,乔渭阳. 基于参数法和贝塞尔曲线的涡轮叶片造型及其优化[J]. 机械设计与制造, 2007(8): 16-19. Shang Rencao, Qiao Weiyang. Turbine blade design and optimization based on the combination means of parametric-Bezier curve[J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2007(8): 16-19. (in Chinese)
- [6] 吴宏,李秋实,郭明,等. 跨声风扇转子的BVF气动优化方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(1):14-17,26. Wu Hong, Li Qiushi, Guo Ming, et al. Aerodynamic optimization method of transonic fan rotor based on BVF[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2007, 33(1): 14-17,26. (in Chinese)
- [7] Bezier P E. Numerical control-mathematics and applications [J]. *Pure Mathematics & Applications*, 1972, 68(3): 508-520.
- [8] Prautzsch H, Boehm W, Paluszny M. Bezier and B-spline techniques[M]. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 2002.
- [9] 刘鼎元. 有理Bezier曲线[J]. 应用数学学报, 1985, 8(1): 70-82. Liu Dingyuan. Rational Bezier curve[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 1985, 8(1): 70-82. (in Chinese)
- [10] 吴介之,马晖扬,周明德. 涡动力学引论[M]. 北京:高等教育出版社,1993. Wu Jiezh, Ma Huiyang, Zhou Mingde. Introduction to vorticity and vortex dynamics[M]. Beijing: Higher Education Press,1993. (in Chinese)
- [11] Wu Chuijie, Xie Yanqiong, Wu Jiezh, “Fluid roller bearing”effect and flow control[J]. *Acta Mechanica Sinica(English Series)*, 2003, 19(5): 476-484. (in Chinese)
- [12] Wu Jiezh, Ma Huiyang, Zhou Mingde. Vorticity and vortex dynamics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [13] 李存标,吴介之. 壁流动中的转换[J]. 力学进展, 2009, 39(4): 480-507. Li Cunbiao, Wu Jiezh. Transition in wall-bounded flows [J]. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(4): 480-507. (in Chinese)
- [14] Lighthill M J. Introduction: boundary layer theory, in: *Laminar boundary layers* [M]. UK: Oxford University Press, 1963; 46-113.
- [15] Lighthill M J. Introduction to theoretical fluid dynamics [M]. UK:Oxford University Press, 1989.

作者简介:

杨小娟(1989—),女,硕士研究生。主要研究方向:轴流压气机叶片设计和优化。

刘若阳(1988—),男,博士研究生。主要研究方向:叶轮机械气动热力学。

余志坤(1977—),男,博士,教授,博导。主要研究方向:混成系统自动验证、微分方程与动力系统、符号—数值计算。

(编辑:马文静)