

文章编号:1674-8190(2015)04-395-10

# 应用傅里叶时间谱方法求解二维跨音速 流动问题解的精度研究

詹磊<sup>1</sup>, 刘锋<sup>1,2</sup>

(1. 西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

(2. 加州大学尔湾分校 机械与航空工程系, 美国 CA92697-3975)

**摘要:** 为了从时间离散精度的角度评估傅里叶时间谱方法的实际计算效率, 对用该方法求解二维跨音速流动问题的解进行了精度研究。通过求解 Euler 方程模拟俯仰振动 NACA0012 翼型的周期性非定常流动。结果表明: 傅里叶时间谱方法可以使用很大的时间间隔较为准确地模拟有激波存在的周期性跨音速流动; 对于此类流动问题, 相比二阶向后差分公式法, 傅里叶时间谱方法在预测翼型表面压力系数积分量特别是升力系数的时间变化规律方面具有明显的计算效率优势; 用于模拟翼型表面压力系数自身的时间变化规律时, 傅里叶时间谱方法具有不低于二阶向后差分公式法的计算效率。

**关键词:** 跨音速流动; 傅里叶时间谱方法; 激波运动; 计算效率

中图分类号: V211.3

文献标识码: A

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.2015.04.001

## Study on Accuracy of the Solutions Using the Fourier Time Spectral Method for Two-dimensional Transonic Flows

Zhan Lei<sup>1</sup>, Liu Feng<sup>1,2</sup>

(1. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, Irvine, CA92697-3975, USA)

**Abstract:** To evaluate the actual computational efficiency of the Fourier time spectral method(TSM) in the aspect of the time-discretization accuracy, the accuracy analysis is performed on the computational solutions of two-dimensional transonic flows. The periodic flows over a pitching NACA0012 airfoil are simulated by solving unsteady Euler equations. Results show that large time interval could be used for the Fourier TSM to simulate periodic transonic flows even when shock waves occur. Error analysis shows that, compared to the 2nd order backward difference formula(BDF) method, the Fourier TSM is much more efficient in predicting the temporal variation of quantities that are integrated from the surface pressure coefficient, especially the lift coefficient. When predicting the temporal variation of the surface pressure coefficient, the computational efficiency of the Fourier TSM is not lower than that of the 2nd order BDF method.

**Key words:** transonic flows; Fourier time spectral method; shock wave movement; computational efficiency

## 0 引言

非定常流动的数值模拟在工程实际问题中具

有广泛的应用。许多应用领域迫切需提高非定常计算的效率, 例如涡轮喷气发动机内流场模拟, 直升机前飞过程中旋翼流动的模拟以及颤振的分析预测。A. Jameson<sup>[1]</sup>发展了一种可以广泛应用于非定常流动计算的双时间推进方法。由于引入了伪时间, 每个真实时刻的瞬时流场可以通过伪时间推进获得。同时加速收敛技术, 例如当地时间步

收稿日期: 2015-08-31; 修回日期: 2015-09-25

通信作者: 詹磊, lzhan@uci.edu

长法和多重网格法,也可以方便地在伪时间推进的过程中使用而不会改变非定常解的时间精度。但是由于使用了二阶向后差分公式法离散真实时间导数,该方法的时间精度较低。若流场随时间的变化比较复杂,例如涡轮喷气发动机内的流动,为了保证数值求解的时间精度,采用二阶向后差分公式法进行时间离散时通常需要使用非常小的真实时间步长,从而导致非定常流动计算的效率低下。

对于周期性非定常流动,K. C. Hall等<sup>[2]</sup>提出了一种线性化快速计算方法。在该方法中,流动变量近似等于时均值和小扰动量的和。其中小扰动量表达为基频谐波函数的形式。这种方法的特点是,小扰动量对于时均值的求解没有任何影响。尽管计算效率很高,但该方法只能应用到流动变量时间变化比较平缓或者非线性度比较低的非定常计算中。为了能够模拟非定常流场中的非线性效应和比较复杂剧烈的流动变量的时间变化过程,同时保留前述线性化方法的高计算效率,W. Ning等<sup>[3]</sup>提出了一种非线性计算方法。该方法依然采用了将流动变量分解为时均值和扰动量的思路,但是时均值的方程中出现了由扰动量组成的额外项,因此时均值方程和扰动量方程的求解紧密地耦合在一起。计算表明这种方法能够捕捉某些比较复杂和变化剧烈的非定常流动现象,例如激波的运动。虽然这种方法可以比较高效地模拟一些非线性非定常流动,但是在该方法中非定常效应仍然只通过基频的谐波函数模拟。为了在计算中包含更高频率的谐波函数,K. C. Hall等<sup>[4]</sup>提出了基于傅里叶展开的谐波平衡方法(Harmonic Balance Method)。这种方法本质上是更加完备的非线性非定常计算方法。该方法仍然在时域内求解非定常流动控制方程,不同时刻的流动方程通过被谱算子离散的时间导数项耦合在一起。计算采用的时间间隔越小,该方法实际包含的谐波分量就越多。因此谐波平衡方法可以获得很高的时间离散精度。K. C. Hall等成功地将该方法应用于快速准确模拟压气机叶栅绕流的计算中。此后,M. McMullen等<sup>[5]</sup>发展了一种主要在频域里求解流动控制方程的非线性频域方法(Non-linear Frequency Domain Method)。该方法同样基于周期性函数的傅里叶展开,因此与谐波平衡方法等价。非线性频域方法被成功地应用在模拟圆柱涡脱落流动和俯仰振动翼型绕流。谐

波平衡方法和非线性频域方法在计算过程中都使用了快速傅里叶变换。为了完全避免使用快速傅里叶变换,A. K. Gopinath等<sup>[6]</sup>推导了离散时间导数谱算子的显式公式,并提出了完全在时域求解流动方程的时间谱方法(Time Spectral Method)。该方法本质上也与谐波平衡方法相同。时间谱方法被成功应用于数值求解圆柱和翼型大迎角涡脱落问题。本文将该类基于傅里叶展开的求解周期性流动问题的计算方法称为傅里叶时间谱方法。在上述傅里叶时间谱方法及其等价方法的研究工作中,经过傅里叶时间谱算子离散的非定常流动控制方程都是通过显式方法求解的,例如使用显式Runge-Kutta伪时间推进格式。近年来,用于求解经过傅里叶时间谱算子离散的非定常流动控制方程的隐式格式得到了发展<sup>[7-11]</sup>。

尽管经过傅里叶时间谱算子离散的非定常流动控制方程可以通过隐式方法得到高效求解,但是在求解周期性流动问题特别是有激波出现的跨音速问题时,对傅里叶时间谱方法在计算效率方面与二阶向后差分公式法相比的实际优势进行的评估还开展得很少。对于两种非定常计算方法在计算效率方面的评估首先需要明确的是在使用相同求解技术(例如显式Runge-Kutta伪时间推进格式)的前提下,计算方法的时间离散精度对非定常计算效率的影响。到目前为止,该类分析仅局限于考察采用不同时间分辨率时计算得到的物面压力系数积分量(例如升力系数或者力矩系数)的精度<sup>[12]</sup>。

本文首先推导傅里叶时间谱方法并将该方法应用于求解做俯仰振动翼型的跨音速绕流问题。其次将针对存在激波运动现象的流动问题,不仅计算其升力系数和力矩系数的误差,并且分析物面压力系数的平均误差,在此基础上比较傅里叶时间谱方法和二阶向后差分公式法的计算效率,进而评价应用傅里叶时间谱方法求解有激波出现的跨音速流动问题的实际效率优势。

## 1 傅里叶时间谱方法

对于二维非定常流动,若不考虑粘性影响,流动控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \mathbf{w} d\Omega + \int_{\infty} (\mathbf{F}dS_x + \mathbf{G}dS_y) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho \bar{u} \\ \rho u \bar{u} + p \\ \rho v \bar{u} \\ \rho E \bar{u} + p u \end{bmatrix} \\ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho \bar{v} \\ \rho u \bar{v} \\ \rho v \bar{v} + p \\ \rho E \bar{v} + p v \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $t$  为时间;  $\rho$  为密度;  $p$  为压强;  $(\bar{u}, \bar{v}) = (u - u_b, v - v_b)$  为流体相对于运动控制体边界的运动速度,  $(u_b, v_b)$  为网格运动速度的  $x$  和  $y$  方向分量; 总能量  $E = e + (u^2 + v^2)/2$ , 其中  $e = p/[(\gamma - 1)\rho]$ ,  $\gamma$  为比热比。

经过空间离散后, 方程(1)可以写成半离散形式:

$$\Omega \frac{d\mathbf{W}}{dt} + R(\mathbf{W}) = 0 \quad (3)$$

式中:  $R(\mathbf{W})$  为定常方程的残值。

若非定常流动是周期性的, 解向量可以展开为傅里叶级数:

$$\mathbf{W}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{W}}_k e^{ik\omega t} = 0 \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_k = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{W}(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5)$$

式中:  $\omega$  为周期性流动的角频率;  $\tilde{\mathbf{W}}_k$  为傅里叶系数。

若在式(4)中仅保留时间平均值和有限多个连续低倍频谐波分量, 则可以构造出离散傅里叶变换(DFT)对。例如, 将一个周期  $N$  等分, 取前  $N$  个时刻上的流场解向量形成时间序列。

$$\mathbf{W}^* = [\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_n, \dots, \mathbf{W}_{N-1}]^T \quad (6)$$

则离散傅里叶正变换可以写为

$$\tilde{\mathbf{W}}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{W}_n e^{-ik\omega n \Delta t} = 0 \quad (7)$$

式中: 时间间隔  $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega N}$ 。

若  $N$  是偶数, 则离散傅里叶反变换可以写为

$$\mathbf{W}_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{\mathbf{W}}_k e^{ik\omega n \Delta t} \quad (8)$$

若  $N$  是奇数, 则离散傅里叶反变换修改为

$$\mathbf{W}_n = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{\mathbf{W}}_k e^{ik\omega n \Delta t} \quad (9)$$

若采用矩阵形式, 式(7)表达的离散傅里叶正变换可以写为

$$\tilde{\mathbf{W}}^* = \mathbf{E} \mathbf{W}^* \quad (10)$$

式(8)和式(9)表达的离散傅里叶反变换可以写为

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{E}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}^* \quad (11)$$

式中:  $\tilde{\mathbf{W}}^*$  为傅里叶系数构成的序列。

当  $N$  是奇数时

$$\tilde{\mathbf{W}}^* = [\tilde{\mathbf{W}}_0, \tilde{\mathbf{W}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{W}}_{\frac{N-1}{2}}, \tilde{\mathbf{W}}_{-\frac{N-1}{2}}, \dots, \tilde{\mathbf{W}}_{-1}]^T \quad (12)$$

当  $N$  是偶数时

$$\tilde{\mathbf{W}}^* = [\tilde{\mathbf{W}}_0, \tilde{\mathbf{W}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{W}}_{\frac{N}{2}-1}, \tilde{\mathbf{W}}_{-\frac{N}{2}}, \tilde{\mathbf{W}}_{-\frac{N}{2}+1}, \dots, \tilde{\mathbf{W}}_{-1}]^T \quad (13)$$

因此  $\tilde{\mathbf{W}}^*$  和  $\mathbf{W}^*$  构成了解向量的离散傅里叶变换对。  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{E}^{-1}$  分别为正反离散傅里叶变换矩阵。离散傅里叶正变换矩阵的元素可以写为

$$E_{m,n} = e^{-i\frac{2\pi}{N}(m-1)(n-1)} \quad (1 \leq m, n \leq N) \quad (14)$$

而离散傅里叶反变化矩阵的元素则可以写为

$$E_{m,n} = \frac{1}{N} e^{i\frac{2\pi}{N}(m-1)(n-1)} \quad (1 \leq m, n \leq N) \quad (15)$$

式中:  $i$  为虚数单位。

由于周期性函数的一阶导函数通常也是周期性的, 对于解向量的一阶时间导数也可以构造出相应的离散傅里叶变换对, 即正变换(式(16))和反变换(式(17))。

$$\tilde{\mathbf{W}}^{(1)*} = \mathbf{E} \mathbf{W}^{(1)*} \quad (16)$$

$$\mathbf{W}^{(1)*} = \mathbf{E}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}^{(1)*} \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{W}^{(1)*}$  为解向量的一阶时间导数的时间序列,  $\tilde{\mathbf{W}}^{(1)*}$  为相应的傅里叶系数序列。

而解向量的时间导数的傅里叶系数和解向量自身的傅里叶系数之间存在下列关系:

$$\tilde{\mathbf{W}}_k^{(1)*} = ik\omega \tilde{\mathbf{W}}_k \quad (18)$$

将式(18)表达的关系写成矩阵形式, 则解向量的时间导数的傅里叶系数序列可以由解向量自身的傅里叶系数序列计算得到:

$$\tilde{\mathbf{W}}^{(1)*} = i\omega N_F \tilde{\mathbf{W}}^* \quad (19)$$

式中:  $N_F$  为一个对角矩阵。

当  $N$  为奇数时

$$N_F = \text{diag}\left(0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}, -\frac{N-1}{2}, \dots, -1\right) \quad (20)$$

当  $N$  为偶数时

$$N_F = \text{diag}\left(0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, 0, -\frac{N}{2} + 1, \dots, -1\right) \quad (21)$$

在时间谱方法中, 解向量的一阶时间导数的时间序列  $W^{(1)*}$  可以通过正反离散傅里叶变换由解向量自身的时间序列  $W^*$  计算得到:

$$W^{(1)*} = E^{-1} \tilde{W}^{(1)*} = i\omega E^{-1} N_F \tilde{W}^* = i\omega E^{-1} N_F E W^* \quad (22)$$

记算子  $i\omega E^{-1} N_F E$  为傅里叶时间谱算子  $D_{t,F}$ , 同时引入伪时间  $\tau$ , 则方程(3)变为

$$\Omega \frac{\partial W^*}{\partial \tau} + \Omega D_{t,F} W^* + R(W^*) = 0 \quad (23)$$

方程(23)中不存在显式的真实时间导数项, 由傅里叶时间谱算子近似的真实时间导数项退化为方程的源项。不同真实时间层上的解向量仅通过近似的真实时间导数项耦合。若将一个周期偶数等分, 可以用快速傅里叶变换(FFT)代替离散傅里叶变换以提高时间谱方法的计算效率。所有真实时间层上的离散流动控制方程由五步显式 Runge-Kutta 伪时间推进格式同时求解。在伪时间推进的过程中, 可以应用当地时间步长和多重网格方法等加速收敛技术而不影响非定常解的时间精度。空间离散方面, 本文采用 JST 格式<sup>[14]</sup>, 即使用中心差分格式的有限体积法和显式地加入二阶—四阶人工粘性项。

## 2 验证算例及结果分析

本文应用傅里叶时间谱方法模拟 NACA0012 翼型绕其四分之一弦长点做周期性俯仰振动的非定常流场。翼型的运动由方程(24)给出:

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin \omega t \quad (24)$$

式中:  $\alpha(t)$  为瞬时迎角;  $\alpha_m$  为平均迎角;  $\alpha_0$  为迎角振幅;  $\omega$  为角频率。

角频率( $\omega$ )与减缩频率( $\kappa$ )的关系为

$$\kappa = \frac{\omega c}{2U_\infty} \quad (25)$$

式中:  $c$  为翼型弦长;  $U_\infty$  为自由来流速度。

计算中使用  $225 \times 33$  的 C 型网格。自由来流马赫数  $Ma_\infty = 0.755$ , 平均迎角  $\alpha_m = 0.016^\circ$ , 迎角振幅  $\alpha_0 = 2.51^\circ$ , 减缩频率  $\kappa = 0.0814$ 。

一个周期内 NACA0012 翼型的升力系数和力矩系数(相对四分之一弦长点)随迎角的变化曲线, 如图 1~图 2 所示。图中给出将一个周期 8 等分, 16 等分和 32 等分的傅里叶时间谱方法的计算结果。为了比较傅里叶时间谱方法的时间离散精度, 同时给出将一个周期 32 等分和 64 等分的二阶向后差分公式法的计算结果以及雷诺数为  $5.5 \times 10^6$  时的实验数据<sup>[14]</sup>。

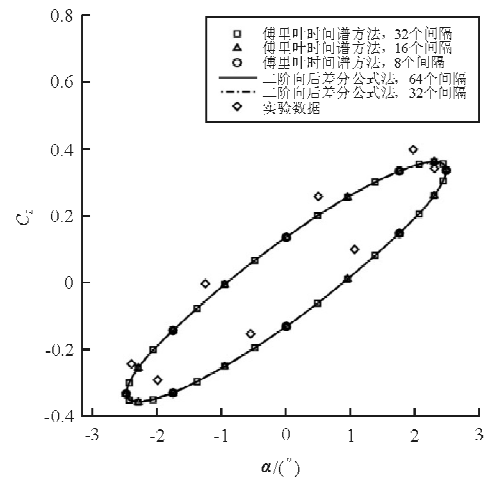


图 1 一个周期内升力系数随迎角变化曲线  
Fig. 1 The variation of lift coefficient versus angle of attack in a period

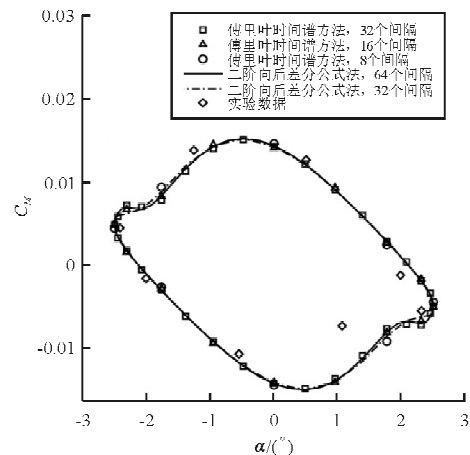


图 2 一周内力矩系数随迎角变化曲线  
Fig. 2 The variation of moment coefficient versus angle of attack in a period

从图 1~图 2 可以看出: 与实验结果相比, 本文的 Euler 方程计算结果特别是升力系数随迎角

的变化存在系统偏差,这与文献[15]中 Euler 方程的计算结果类似。

从图 1 可以看出:所有的计算结果都相互吻合得很好;将一个周期 8 等分的傅里叶时间谱方法的结果和将一个周期 64 等分的二阶向后差分公式法的结果没有明显差别。

从图 2 可以看出:随着时间分辨率的提高,傅里叶时间谱方法的计算结果快速收敛到将一个周期 64 等分的二阶向后差分公式法的计算结果,若要精确模拟力矩系数随迎角变化规律的所有细节,使用傅里叶时间谱方法时,至少要将一个周期 16 等分甚至是 32 等分。

与升力系数相比,力矩系数随迎角的变化规律更复杂,所以傅里叶时间谱方法需要使用更多的谐波分量或者更高的时间分辨率来准确模拟力矩系数的时间变化规律。

压力系数( $C_p$ )的时间平均值和一倍频到三倍频三个谐波分量沿翼型表面的分布规律如图 3~图 6 所示。

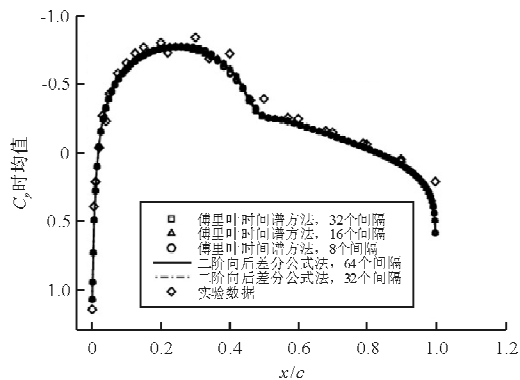
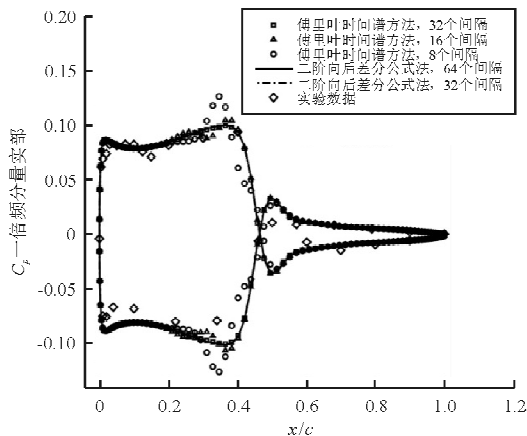
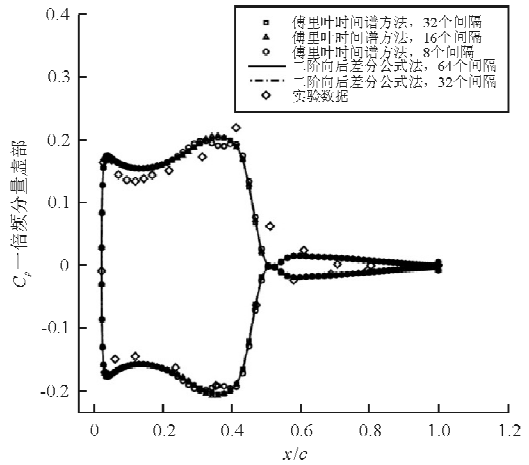


图 3 压力系数时均分量

Fig. 3 Time-averaged surface pressure coefficient



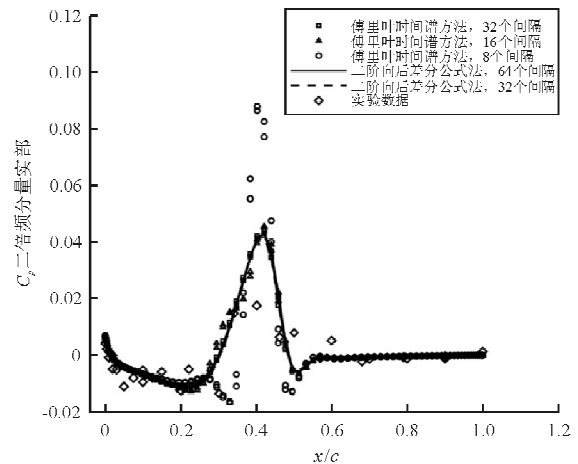
(a) 傅里叶系数实部



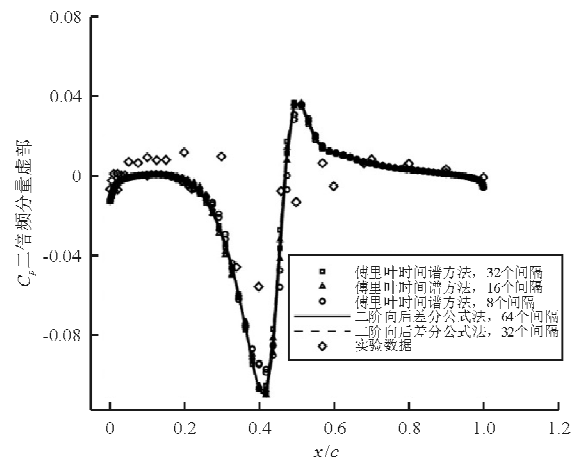
(b) 傅里叶系数虚部

图 4 表面压力系数一倍分量

Fig. 4 The first mode of the surface pressure coefficient



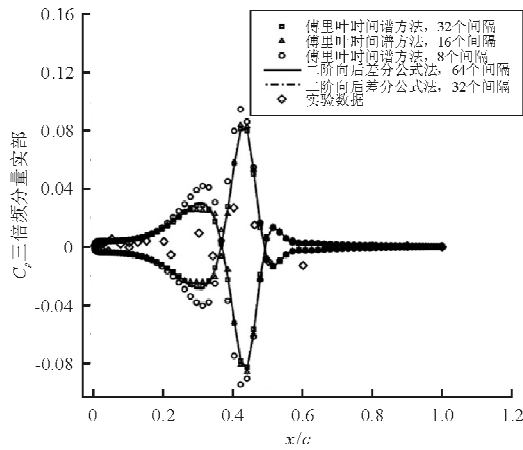
(a) 傅里叶系数实部



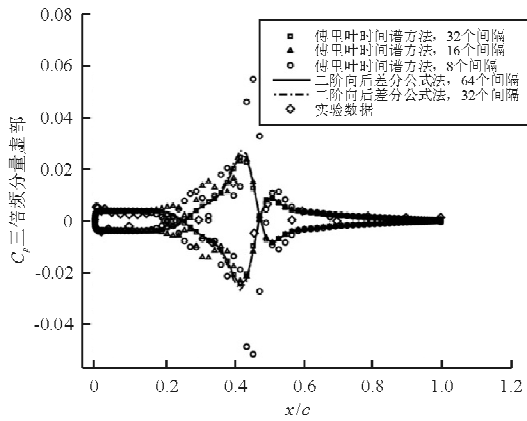
(b) 傅里叶系数虚部

图 5 表面压力系数二倍分量

Fig. 5 The second mode of the surface pressure coefficient



(a) 傅里叶系数实部



(b) 傅里叶系数虚部

图6 表面压力系数三倍分量

Fig. 6 The third mode of the surface pressure coefficient

计算结果和实验结果都显示激波的大致移动范围是  $0.2 < x/c < 0.6$ 。从图3可以看出:在该范围内,若使用傅里叶时间谱方法,将一个周期8等分仅能比较准确地预测翼型表面压力系数的时间平均值。当时间分辨率提高到一个周期16等分时,傅里叶时间谱方法可以比较准确地模拟一倍频分量,二倍频分量和三倍频分量的实部。而对于三倍频分量的虚部,从图6(b)可以看出,将一个周期16等分时,傅里叶时间谱方法的计算结果与将一个周期64等分的二阶向后差分公式法的计算结果偏差较大。当时间分辨率提高到将一个周期32等分时,傅里叶时间谱方法可以准确模拟翼型表面压力系数的时间平均值和一倍频到三倍频三个谐波分量。

在激波移动范围之外,即  $x/c < 0.2$  或者  $x/c > 0.6$ ,仅将一个周期8等分,傅里叶时间谱方法就可

以十分准确地计算翼型表面压力系数的时间平均值和一倍频到三倍频三个谐波分量。从图3~图6可以看出将一个周期8等分的傅里叶时间谱方法的计算结果与将一个周期64等分的二阶向后差分公式法的计算结果吻合得很好。这是因为在没有激波出现的区域内,流动变量的时间变化连续且十分光滑。若使用傅里叶时间谱方法,流动变量的高频谐波分量衰减得很快,因此在计算中仅保留前三个谐波分量足以精确模拟这些区域内流动变量的周期性变化。

正是由于将一个周期8等分时,使用傅里叶时间谱方法仍然可以在相当大的空间范围内准确模拟翼型表面压力系数的时间变化规律,将翼型表面压力系数积分得到的升力系数和力矩系数的计算结果也具有比较高的精度。从图2可以看出,将一个周期8等分时,使用傅里叶时间谱方法产生的在激波移动区域内压力系数分布上的偏差仅仅体现在力矩系数时间变化的局部特征的偏离,而力矩系数随时间变化的大致趋势和数值范围依然比较准确。

### 3 跨音速流动解的精度

上述算例的计算结果比较直观地显示了使用较低的时间分辨率,傅里叶时间谱方法就可以获得具有较高时间精度的非定常流动的数值解。而使用傅里叶时间谱方法代替二阶向后差分公式法的意义在于采用相同时间分辨率时可以大幅度提高时间离散的精度。因此获得具有相同时间精度的非定常解,傅里叶时间谱方法可以使用更低的时间分辨率或者更少的物理时刻,从而可以减少非定常计算的计算量以提高计算效率。为了能够系统全面并且定量地评价傅里叶时间谱方法的在求解跨音速流动问题时的计算效率,本文对该方法的解进行误差分析研究。

由上述算例的结果分析可知,流场中是否存在激波以及激波运动现象对于傅里叶时间谱方法的计算效率影响较大。因此进行数值解的误差分析时,本文使用傅里叶时间谱方法求解两个周期性流动问题。第一个流动问题是上述算例,即俯仰振动翼型的周期性无粘绕流,自由来流马赫数  $Ma_\infty = 0.755$ ,平均迎角  $\alpha_m = 0.016^\circ$ ,迎角振幅  $\alpha_0 = 2.51^\circ$ ,减缩频率  $\kappa = 0.0814$ 。该非定常流场中存在激波

运动现象。为了便于比较,第二个流动问题仍然是俯仰振动翼型的周期性无粘绕流问题。与第一个流动问题相比,第二个流动问题中的自由来流马赫数下降到  $Ma_\infty = 0.6$ , 而其他流动条件保持不变。计算结果表明这是纯亚音速流动问题,流场中没有激波出现。使用傅里叶时间谱方法时,计算中采用五种时间分辨率,分别为将一个周期 4 等分、8 等分、16 等分、32 等分和 64 等分。为了比较计算效率,本文也使用二阶精度向后差分公式法求解上述两个流动问题的数值解,并对这些数值解进行误差分析。使用二阶精度向后差分公式法时,计算中采用三种不同的时间分辨率,分别为将一个周期 16

等分、32 等分和 64 等分。在所有的误差分析中,精确解均为使用傅里叶时间谱方法并将一个周期 64 等分得到的数值解。为了确保误差分析的可靠性,无论使用傅里叶时间谱方法还是二阶精度向后差分公式法,计算中做伪时间推进时均将残值收敛标准设定为  $1 \times 10^{-14}$ 。

在评价非线性频域方法的计算效率时, M. McMullen 等<sup>[12]</sup>考察了计算得到的一个周期内的升力系数和力矩系数随时间的变化过程。本文也首先对升力系数和力矩系数做误差分析。对于本文计算得到的任何一个数值解,一个周期内升力系数的误差(的平方)定义如下:

$$Error_{C_L}^2 = \sum_{n=0}^m \{ [Re_n(C_L) - Re_n(C_{L,a})]^2 + [Im_n(C_L) - Im_n(C_{L,a})]^2 \} + \sum_{n=m+1}^{m_a} \{ [Re_n(C_{L,a})]^2 + [Im_n(C_{L,a})]^2 \} \quad (26)$$

式中:  $Re_n(C_L)$  和  $Im_n(C_L)$  分别为该数值解升力系数第  $n$  倍频谐波分量傅里叶系数的实部和虚部;  $Re_n(C_{L,a})$  和  $Im_n(C_{L,a})$  分别为精确解升力系数第  $n$  倍频谐波分量傅里叶系数的实部和虚部;  $m$  和  $m_a$  分别为该数值解和精确解各自包含的傅里叶谐波分量的个数。

式(26)中第一个和式为该数值解的 aliasing 误差,而第二个和式为该数值解的 truncation 误差。类似的,对于本文计算得到的任何一个数值解,一个周期内力矩系数的误差(的平方)定义如下:

$$Error_{C_m}^2 = \sum_{n=0}^m \{ [Re_n(C_m) - Re_n(C_{m,a})]^2 + [Im_n(C_m) - Im_n(C_{m,a})]^2 \} + \sum_{n=m+1}^{m_a} \{ [Re_n(C_{m,a})]^2 + [Im_n(C_{m,a})]^2 \} \quad (27)$$

按照式(26)~式(27)的定义,本文计算得到的升力系数和力矩系数的误差分析结果如图 7~图 8 所示。首先对于有激波运动现象出现的流动(当  $Ma_\infty = 0.755$ ),使用二阶向后差分公式法计算得到的升力系数的误差随时间分辨率的提高而减小,并且升力系数误差下降的斜率小于 2。而在双对数坐标系统下对于二阶向后差分公式法的解,若流动变量(例如压力系数)的时间变化过程是光滑的,则无论其本身还是其积分量的误差随时间分辨率的提高而下降的斜率是 2。当非定常流动中有激波运动现象出现时,翼型表面某些区域的压力系数的时间变化过程不光滑。因此由压力系数积分得到的升力系数的误差随时间分辨率的提高而下降的斜率小于 2。

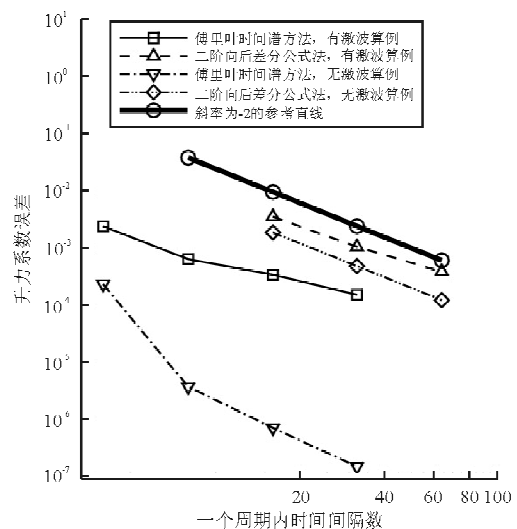


图 7 升力系数误差

Fig. 7 Error in lift coefficient

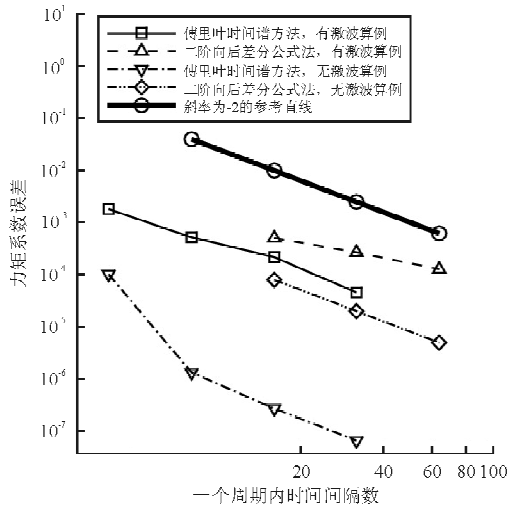


图8 力矩系数误差

Fig. 8 Error in moment coefficient

在采用相同时间分辨率的前提下,傅里叶时间谱方法计算得到的升力系数的误差明显小于二阶向后差分公式法的升力系数误差。这意味着达到任意相同的升力系数的精度水平,傅里叶时间谱方法在一个周期内需要使用的间隔数远少于二阶向后差分公式法。例如,使用前者将一个周期8等分的升力系数的误差(图7)与使用后者将一个周期64等分的升力系数的误差处于相同水平。这表明在有激波运动现象出现的流动问题中,若以升力系数为考察对象,则相比于二阶向后差分公式法,傅里叶时间谱方法具有较高的计算效率。

在图7中,对于没有激波出现的流动(当 $Ma_\infty = 0.6$ ),使用二阶向后差分公式法的升力系数误差

$$\begin{aligned} Error_{C_p, averaged}^2 = & \frac{1}{q} \sum_{s=1}^q \sum_{n=0}^m \{ [Re_n(C_p(s)) - Re_n(C_{p,a}(s))]^2 + [Im_n(C_p(s)) - Im_n(C_{p,a}(s))]^2 \} + \\ & \frac{1}{q} \sum_{s=1}^q \sum_{n=m+1}^{m_a} \{ [Re_n(C_{p,a}(s))]^2 + [Im_n(C_{p,a}(s))]^2 \} \end{aligned} \quad (28)$$

式中: $q$ 为翼型表面网格单元个数; $s$ 为翼型表面网格单元序号。

按照式(28)的定义,本文计算得到的翼型表面压力系数的平均误差如图9所示。

从图9可以看出:压力系数平均误差下降的趋势与升力系数和力矩系数的分析结果类似。

对于有激波运动现象出现的流动(当 $Ma_\infty = 0.755$ ),在使用比较低的时间分辨率时(一个周期

随时间分辨率的提高而下降的斜率较为精确地等于2。这一结果符合理论分析的结论。由于流动中没有激波出现,翼型表面处处压力系数的时间变化过程都是光滑的,因此由压力系数积分得到的升力系数的误差随时间分辨率的提高而下降的斜率精确等于2。在采用相同时间分辨率的前提下,使用傅里叶时间谱方法计算得到的升力系数的误差远小于二阶向后差分公式法的升力系数误差。从图7可以看出,使用前者将一个周期4等分的升力系数的误差与使用后者将一个周期64等分的升力系数的误差处于相同水平。因此在应用到没有激波出现的流动问题时,若以升力系数为考察对象,傅里叶时间谱方法在计算效率方面的优势更加显著。

力矩系数的误差分析结果与升力系数的结论类似。不同之处在于,若以力矩系数为研究对象,傅里叶时间谱方法在计算效率方面的优势有所下降。这是因为力矩系数随时间变化的过程比升力系数随时间变化的过程复杂。因此傅里叶时间谱方法要使用更高的时间分辨率来捕捉前者的细节。

以上的误差分析均将翼型表面压力系数的积分量作为研究对象。在工程实践中,通常也关心翼型表面压力系数自身的计算结果,因为其能反映流动的细节和局部特征。为了更加系统全面地评价傅里叶时间谱方法的计算效率,本文对使用该方法计算得到的翼型表面压力系数进行误差分析。压力系数的平均误差(的平方)的定义如下:

内的间隔数小于或等于16),傅里叶时间谱方法在模拟激波运动等强非线性流动细节方面的精度与二阶向后差分公式法相当。从图9可以看出,在压力系数平均误差大于 $1 \times 10^{-2}$ 的范围内,达到相同的误差水平,傅里叶时间谱方法和二阶向后差分公式法需要的时间分辨率相同,即二者的计算效率相当。

只有在采用较高的时间分辨率时(一个周期内



的间隔数大于或等于 32), 傅里叶时间谱方法计算得到的压力系数的平均误差才显著低于二阶向后差分公式法的结果。相应的从图 9 可以看出, 在压力系数平均误差小于  $1 \times 10^{-2}$  的范围内, 达到相同的误差水平, 傅里叶时间谱方法需要的时间分辨率低于二阶向后差分公式法, 即前者的计算效率高于后者。

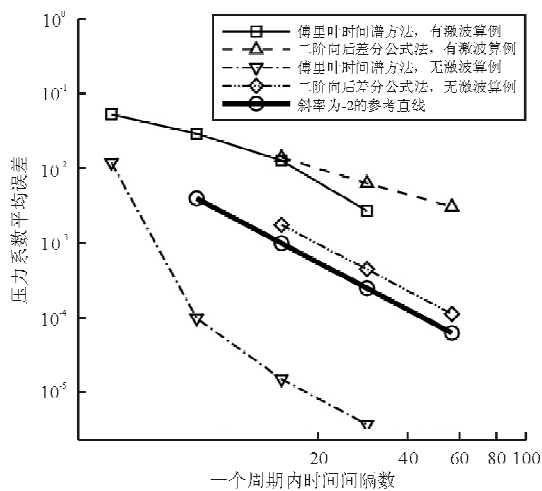


图 9 压力系数平均误差

Fig. 9 Averaged error in the surface pressure coefficient

出现的上述现象是因为激波运动区域内的压力系数的频谱较为复杂, 从频率高于 7 倍频(将一个周期 16 等分能包含频率最高为 7 倍频的谐波分量)的高倍频分量开始压力系数的频谱才显著衰减。而激波运动范围外的压力系数的频谱较为简单并且从低倍频分量开始就迅速衰减。因此在时间分辨率较低的情况下, 压力系数的平均误差主要体现了激波运动范围内压力系数的误差。当一个周期内的间隔数小于或等于 16 时, 对于激波运动范围内的压力系数, 傅里叶时间谱方法没有包含所有幅值不能忽略的高倍频谐波分量。因此计算得到的压力系数存在较大的 truncation 误差和 aliasing 误差, 这就导致了较大的压力系数的平均误差。相比之下, 压力系数的积分量特别是升力系数的频谱构成简单并且从低倍频分量开始就迅速衰减, 所以使用傅里叶时间谱方法时即便采用较低的时间分辨率计算得到的升力系数的误差也很低。

升力系数、力矩系数的误差和物面压力系数的平均误差的分析表明, 若流动问题中存在激波运动

现象, 则使用傅里叶时间谱方法预测压力系数的积分量(特别是升力系数的时间变化过程)相比二阶向后差分公式法可以取得较高的计算效率。而要模拟激波运动范围内压力系数的时间变化过程, 使用傅里叶时间谱方法的计算效率有所下降但仍不低于二阶向后差分公式法。对于没有激波出现的流动问题, 无论是模拟物面压力系数的时间变化过程还是其积分量的时间变化过程, 相比二阶向后差分公式法, 傅里叶时间谱方法都具有极高的计算效率优势。

## 4 结 论

(1) 对于有激波运动现象的跨音速流动问题, 仅将一个周期 8 等分, 傅里叶时间谱方法就可以准确地模拟翼型表面压力系数的积分量特别是升力系数随时间变化的规律。对于翼型表面压力系数分布, 在激波移动范围外, 将一个周期 8 等分足以使傅里叶时间谱方法给出精确的计算结果。而在激波移动范围内, 需要增加一个周期内的时间间隔数来准确预测翼型表面压力系数的非定常分布。

(2) 以翼型表面压力系数积分量特别是升力系数为研究对象, 相比二阶向后差分公式法傅里叶时间谱方法具有明显的计算效率优势。若以翼型表面压力系数本身为计算目标, 则傅里叶时间谱方法的计算效率会有所下降但仍不低于二阶向后差分公式法。

## 参 考 文 献

- [1] Jameson A. Time dependent calculations using multigrid with applications to unsteady flows past airfoils and wings [C]. AIAA-91-1596, 1991.
- [2] Hall K C, Crawley E F. Calculation of unsteady flows in turbomachinery using the linearized Euler equations [J]. AIAA Journal, 1989, 27(6): 777-787.
- [3] Ning W, He L. Computation of unsteady flows around oscillating blades using linear and nonlinear harmonic Euler methods [J]. ASME Journal of Turbomachinery, 1998, 120: 508-514.
- [4] Hall K C, Thomas J P, Clark W S. Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique [J]. AIAA Journal, 2002, 40(5): 879-886.
- [5] McMullen M, Jameson A, Alonso J J. Application of nonlinear frequency domain solver to the Euler and Navier-

- Stokes equations[C]. AIAA-2002-0120, 2002.
- [6] Gopinath A K, Jameson A. Application of the time spectral method to periodic unsteady vortex shedding [C]. AIAA-2006-0449, 2006.
- [7] Woodgate M A, Badcock K J. Implicit harmonic balance solver for transonic flow with forced motions[J]. AIAA Journal, 2009, 47(4): 893-901.
- [8] Su X, Yuan X. Implicit solution of time spectral method for periodic unsteady flows[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2010, 63: 860-876.
- [9] Antheaume S, Corre C. Implicit time spectral method for periodic incompressible flows[J]. AIAA Journal, 2011, 49(4): 791-805.
- [10] Im D K, Kwon J H, Park S H. Periodic unsteady flow analysis using a diagonally implicit harmonic balance method [J]. AIAA Journal, 2012, 50(3): 741-745.
- [11] Thomas J P, Custer C H, Dowell E H, et al. Compact implementation strategy for a harmonic balance method within implicit flow solvers [J]. AIAA Journal, 2013, 51(6): 1374-1381.
- [12] McMullen M, Jameson A. The computational efficiency of non-linear frequency domain methods[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 212: 637-661.
- [13] Jameson A, Schmidt W, Turkel E. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes[C]. AIAA-81-1259, 1981.
- [14] Landon R II. NACA0012 oscillation and transient pitching, compendium of unsteady aerodynamic measurements, Data Set 3[R]. AGARD TR R-702, 1982.
- [15] Gao C, Yang S, Luo S, et al. Calculation of airfoil flutter by and Euler method with approximate boundary condition [J]. AIAA Journal, 2005, 43(2): 295-305.

### 作者简介:

詹 磊(1981—),男,博士研究生。主要研究方向:理论与计算流体力学。

刘 锋(1963—),男,教授,博导。主要研究方向:计算流体力学、涡轮机械空气动力学、推进技术等。

(编辑:赵毓梅)