

高阶 DG 格式多重网格方法构造中的不同 隐式策略影响研究

李广佳¹, 郝海兵², 陈智³, 张强⁴

(1. 中国航天空气动力技术研究院 第十一总体设计部, 北京 100074)

(2. 中国航空计算技术研究所 第七研究室, 西安 710068)

(3. 中航飞机研发中心 动力燃油所, 西安 710089)

(4. 西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

摘要: DG方法是一种非常具有潜力的高精度方法,但在对复杂外形的数值模拟方面仍存在内存需求量大、计算量巨大等不足。为了进一步提高DG方法求解Euler方程的效率,在传统 p 型多重网格的基础上,结合LU-SGS和GMRES两种隐式迭代方法,研究其整体加速性能。 p 型多重网格方法通过对不同阶次多项式近似解进行递归迭代求解,来达到加速收敛的目的。高阶近似($p > 0$)使用显式龙格库塔格式,最低阶近似($p = 0$)使用隐式格式。对NACA0012翼型和ONERA M6机翼跨音速无粘流动进行数值模拟,结果表明:与显式TVD-RKDG时间格式相比,DG(p_0)层上采用LU-SGS和GMRES的 p 型多重网格方法收敛速度均得到明显提高,且GMRES迭代法性能最佳,LU-SGS迭代法次之。

关键词: 间断 Galerkin 方法; p 型多重网格; 欧拉方程; LU-SGS; GMRES

中图分类号: V211

文献标识码: A

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.2016.03.003

Study of Different Implicit Schemes for High Order DG Multigrid Method

Li Guangjia¹, Hao Haibing², Chen Zhi³, Zhang Qiang⁴

(1. The Eleventh Design Department, China Academy of Aerospace Aerodynamics, Beijing 100074, China)

(2. No. 7 Department, Aeronautical Computing Technique Research Institute, Xi'an 710068, China)

(3. Institute of Power and Fuel, AVIC Aircraft Research and Development Center, Xi'an 710089, China)

(4. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: As a kind of high order method, the DG method has great potential in the numerical simulation of complex configuration, but there are a large amount of internal memory requirement and a huge amount of computation. In order to further improve the efficiency of the method for solving the Euler equation, the overall acceleration performance is studied by combining the two implicit iterative methods of LU-SGS and GMRES. The convergence acceleration of p -multigrid method is achieved through the recursive iterative solving of different order polynomial approximations. In order to achieve better convergence effect, implicit scheme is implemented on the lowest-order approximation while explicit schemes are implemented on the higher-order approximations. The transonic inviscid flow around NACA0012 airfoil and ONERA M6 wing are simulated. The numerical results show that, compared with the explicit TVD-RKDG method, convergence rates for the p -type multigrid methods, which adopt LU-SGS or GMRES scheme on $DG(p_0)$ layer, are significantly improved, while the performance of GMRES iterative method is best and LU-SGS iteration is secondary.

Key words: discontinuous Galerkin methods; p -type multigrid; Euler equations; LU-SGS; GMRES

限元法(FEM)和有限体积法(FVM)的优点,近年来得到了广泛关注。该方法最早由 W. H. Reed 等^[1]于 1973 年在求解中子输运方程时引入,但在随后的很长一段时间内并未被人们所重视,直到 20 世纪 90 年代, B. Cockburn 等^[2-3]提出了 Runge-Kutta DG 方法(TVD-RKDG),并给出了部分收敛性和稳定性证明,该方法才被广泛地应用于计算流体力学。DG 方法只需在单元内部通过提高逼近多项式的阶次就能实现高阶精度,具有很好的紧致特性,且易于实行并行计算。此外,由于解在单元边界上保持间断,该方法非常适用于求解间断问题。目前,DG 方法作为一种最具潜力的高精度方法^[4],将会对计算流体力学的发展产生积极的推动作用。

尽管 DG 方法具有突出优势,但其存在内存需求量大、计算量巨大等缺陷,尤其在对复杂外形的数值模拟方面还存在诸多不足,上述缺点严重制约了 DG 方法的工程应用。DG 方法的存储量主要体现在每个单元均至少需要存储 $\left[\frac{(k+d-1)!}{(k-1)! d!} N_{\text{eqn}} \right] \times \left[\frac{(k+d-1)!}{(k-1)! d!} N_{\text{eqn}} \right]$ 个数据,其中, N_{eqn} 为需求解物理量的个数; d 为空间维数; k 为求解精度。可见,与 FVM 相比,DG 方法存储量巨大。DG 方法的计算量大则主要是因为高精度方法中的空间算子刚性太强,致使其计算格式稳定性差、难以收敛而引起的。为了解决上述问题,目前已提出了众多行之有效的加速收敛的方法,其中 p 型多重网格方法被证实为一种高效方法。该方法最初由 E. M. Ronquist 等^[5]提出,并成功应用于谱元方法中。随后, F. Bassi 等^[6]、K. J. Fidkowski 等^[7]又分别将该方法引入到 DG 方法中求解欧拉方程。H. Luo 等^[8-9]也对该方法展开了详细研究,提出了全速域快速、低内存消耗的 p 型多重网格方法,并指出若在所有的近似层上都使用显式推进格式,则该方法加速收敛效果并不明显;但若在最低阶格式(DG(p_0))中选用隐式推进格式,则 p 型多重网格方法能够明显提高收敛速度。

本文在文献[10]的基础上,对 DG(p_0)层上的不同隐式策略在 p 型多重网格方法中的应用展开研究,并考察其整体加速性能。其中, DG(p_0)层隐

式求解主要选取 FVM 中的两种常用的隐式迭代方法,即 LU-SGS 和 GMRES。

1 控制方程

非定常 Euler 方程在直角坐标系下的守恒形式为

$$\frac{\partial \mathbf{U}(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}[\mathbf{U}(x, t)] = 0 \quad (1)$$

$$\text{式中: } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ e \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + p \delta_{ij} \\ u_j (e + p) \end{bmatrix}, \rho \text{ 为气体密度, } e \text{ 为单位体积总内能, } p \text{ 为压力, } u_i \text{ 为 } x_i \text{ 方向的速度。}$$

对于气体动力学方程:

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) \quad (2)$$

式中: γ 为比热比,取 $\gamma = 1.4$ 。

2 间断 Galerkin 方法

利用间断 Galerkin 方法求解式(1),首先需要将计算区域划分成互不重叠的子域。子域可以选取为任意形状,对于二维空间,本文采用三角形非结构网格;对于三维空间,采用四面体非结构网格。

定义有限元空间 V_h :

$$V_h = \{v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_K \in V(K); \forall K \in \tau_h\} \quad (3)$$

式中: τ_h 为子域空间; $V(K)$ 为局部函数空间,取作 p ($p=1, 2, L$) 次多项式的集合。

假设间断函数在有限元空间中的近似解为 U_h ,将式(1)两边同乘以试验函数 v ,写成变分形式,再采用分部积分,得到守恒方程组的弱形式:

$$\frac{d}{dt} \int_K v_h U_h d\Omega + \int_{\partial K} v_h \mathbf{F}(U_h) \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_K \nabla v_h \cdot \mathbf{F}(U_h) d\Omega = 0 \quad (4)$$

式中: Ω 为计算域; $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界。

在每个单元内:

$$\begin{cases} v_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p v_j \phi_j(\mathbf{x}) \\ U_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p u_j \phi_j(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (\forall \mathbf{x} \in K) \quad (5)$$

式中: $\phi_j(\mathbf{x})$ 为基函数。

将式(5)带入式(4),得到半离散形式的守恒方程:

$$\frac{d}{dt} \int_K \phi_j \phi_i \mathbf{u}_i d\Omega + \int_{\partial K} \phi_j \mathbf{F} \left(\sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i \phi_i \right) \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_K \nabla \phi_j \cdot \mathbf{F} \left(\sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i \phi_i \right) d\Omega = 0 \quad (6)$$

式(6)称为 p 阶间断 Galerkin 有限元离散, p 为式(5)中基函数的最大阶数。可以看出 $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h$ 在整个计算区域内不再连续,在单元边界上存在间断,且整个流场的自由度已经转变成求解插值系数 \mathbf{u} ,而非流场守恒变量 \mathbf{U} 。

为了便于计算,通常还需要进行坐标变换。针对三角形单元,本文采用面积坐标;针对四面体单元,则采用体积坐标。将总体笛卡尔坐标转换成局部自然坐标,将空间中的任意单元转变成局部坐标系中的标准单元,则式(6)变为

$$\frac{d}{dt} \int_K \phi_j \phi_i \mathbf{u}_i |J| d\Omega + \int_{\partial K} \phi_j \mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} |J_s| d\sigma - \int_K J^{-1} \nabla \phi_j \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}_h) |J| d\Omega = 0 \quad (7)$$

式中: $|J|$ 为体坐标变换雅可比矩阵; $|J_s|$ 为面坐标变换雅可比矩阵。

对于式(7)中的积分,采用高斯数值积分:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K} \phi_j \cdot \mathbf{F} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \phi_i \right) \mathbf{n} |J_s| d\sigma \\ & \approx \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^L \omega_l |J_s| \phi_j(x_d) \mathbf{F} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \phi_i(x_d) \right] \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \int_K J^{-1} \nabla \phi_j \cdot \mathbf{F} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \phi_i \right) |J| d\Omega \\ & \approx \sum_{j=1}^M \omega_j J^{-1} \nabla \phi_j(x_{Kj}) \mathbf{F} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \phi_i(x_{Kj}) \right] |J| \end{aligned} \quad (9)$$

其中数值通量选取 HLLC 格式。HLLC 近似黎曼解方法是一种具有实际应用价值的、能够精确模拟接触间断和剪力波的最简单的平均状态方法。采用 HLLC 近似黎曼解方法得到的结果与采用精确黎曼解方法得到的结果基本相同。此外, DG 方法在计算过程中会产生数值振荡,严重时可能导致无法求解,因此,本文采用间断探测器和斜率限制器^[11]相结合的方法来抑制间断处的数值振荡。

3 p 型多重网格

目前,基于非结构网格的有限体积法在求解 Euler 方程和 N-S 方程时,广泛使用 h 型多重网格方法进行加速收敛。 h 型多重网格方法通过粗网格上的解修正细网格上的解以达到加速收敛的目的。 p 型多重网格方法可以看作是 h 型多重网格方法在高阶有限元空间的一种推广,即方程组的解在不同阶次多项式近似层上进行迭代求解。通过将高阶近似上的低频误差转换成低阶近似上的高频误差,达到快速消除高阶近似上的低频误差的目的。针对 $DG(p_1)$ 方法,本文使用两层 V 循环,主要包括以下步骤:

(1) 在最高阶近似 p_1 上计算一个时间步,来获取初始流场 $\mathbf{u}_{p_1}^{n+1}$;

(2) 将 p_1 层上的解和残值限制到低一层近似解 p_0 上:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{p_0} = \mathbf{I}_{p_1}^{p_0} \mathbf{u}_{p_1}^{n+1} \\ \mathbf{R}_{p_0} = \tilde{\mathbf{I}}_{p_1}^{p_0} \mathbf{R}(\mathbf{u}_{p_1}^{n+1} + \mathbf{F}_{p_1}) \end{cases} \quad (10)$$

(3) 在 p_0 层上计算强迫项:

$$\mathbf{F}_{p_0} = \mathbf{R}_{p_0} - \mathbf{R}(\mathbf{u}_{p_0}) \quad (11)$$

(4) 在 p_0 层上计算一个时间步,计算残值:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{u}_{p_0}) + \mathbf{F}_{p_0} \quad (12)$$

则可以更新 p_0 层上的解 $\mathbf{u}_{p_0}^{n+1}$;

(5) 计算从 p_0 到 p_1 层的延拓修正算子 C_{p_0} , 并更新 p_1 层上的解 $\mathbf{u}_{p_1}^{n+1}$:

$$\begin{cases} C_{p_0} = \mathbf{u}_{p_0}^{n+1} - \mathbf{u}_{p_0} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{p_1}^{n+1} = \mathbf{u}_{p_1}^{n+1} + \mathbf{J}_{p_0}^{p_1} C_{p_0} \end{cases} \quad (13)$$

从初始解开始,低阶近似多项式上的解都会对高阶近似多项式上的解进行修正,从而加速收敛。

使用有限元近似空间的基函数(式(14))来定义 $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \tilde{\mathbf{I}}$ 等算子。

$$\begin{cases} \mathbf{I}_p^q = (\mathbf{M}^q)^{-1} \mathbf{M}^{qp} \\ \mathbf{J}_p^q = (\mathbf{M}^p)^{-1} \mathbf{M}^{qp} \\ \tilde{\mathbf{I}}_p^q = \mathbf{M}^{qp} (\mathbf{M}^p)^{-1} \\ \mathbf{M}_{i,j}^p = \int_K \phi_i^p \phi_j^p d\Omega \\ \mathbf{M}_{i,j}^{pq} = \int_K \phi_i^p \phi_j^q d\Omega \end{cases} \quad (14)$$

式中: \mathbf{I} 为状态限制算子; \mathbf{J} 为状态延拓算子; $\tilde{\mathbf{I}}$ 为残值限制算子。

不同阶层次之间的限制和延拓算子均可在母单元上计算。当选取正交基函数时,式(14)比较容易计算。

4 GMRES 算法

在最低层 p_0 近似上, DG 方法即为一阶精度中心格式的有限体积法, 其具有相对成熟的隐式算法, 例如 ADI 方法、点隐式方法、LU-SGS 方法、GMRES 方法等。本文选取 LU-SGS^[12] 和 GMRES^[13] 方法, 其中 LU-SGS 方法详见文献[10], 限于篇幅, 本文不再赘述; GMRES 以 Galerkin 原理为基础, 建立 Krylov 子空间的一组标准正交基, 再在 Krylov 子空间中利用最小二乘方法得到解向量。

将 p_0 层上的 Euler 方程空间离散并进行线性化, 得

$$\left(\frac{V}{\Delta t} \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}}\right) \Delta \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (15)$$

式中: V 为单元体积; \mathbf{R} 为 p_0 层上解的残值。

将网格面上的无粘通量通过雅可比矩阵最大特征值分裂, 得到整个流场空间的一个 N 维线性方程组 (N 为总网格数):

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{U}^n = \mathbf{R}^n \quad (16)$$

GMRES 算法的具体过程如下:

(1) 给定初值 $\Delta \mathbf{Q}_0^{n+1}$, 计算初始残量 $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{R} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{Q}_0^{n+1}$, 并且对 $\mathbf{r}^{(0)}$ 进行预处理, 即 $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{r}^{(0)}$, 记 $\beta = \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2$, 构造第 1 个列向量 $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)} / \beta$ 。

(2) 开始进行内迭代, 通过 Arnoldi 方法构造 Krylov 子空间的标准规范正交基:

① 对于 $j=1, 2, \dots, m$,

a. 计算 $\mathbf{w}^{(j)} = \mathbf{A} \mathbf{v}^{(j)}$, 并对 \mathbf{w} 进行预处理, $\mathbf{w}^{(j)} = \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{w}^{(j)}$;

b. 对于 $i=1, 2, \dots, j$, 计算

$$\begin{cases} h_{ij} = (\mathbf{w}^{(j)}, \mathbf{v}^{(i)}) \\ \tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)} = \mathbf{A} \mathbf{v}^{(j)} - \sum_{i=1}^j h_{ij} \mathbf{v}^{(i)} \\ h_{j+1,j} = \|\tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)}\|_2 \\ \mathbf{v}^{(j+1)} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)}}{h_{j+1,j}} \end{cases} \quad (17)$$

② Krylov 子空间的标准正交基可以写成矩阵 \mathbf{V}_m :

$$\mathbf{V}_m = [\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(m)}] \quad (18)$$

由 Gram-Schmidt 正交化过程可知, 式(18)可表示为如下矩阵形式:

$$\mathbf{A} \mathbf{V}_m = \mathbf{V}_m \mathbf{H}_m + h_{m+1} \mathbf{v}^{(m+1)} \mathbf{e}_m^{(m)T} = \mathbf{V}_{m+1} \tilde{\mathbf{H}}_m \quad (19)$$

式中: $\mathbf{H}_m \in \mathbf{R}^{m,m}$ 为上 Hessenberg 矩阵,

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & \cdots & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & \cdots & h_{2,m} \\ & h_{3,2} & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & h_{m,m} \\ & & & & h_{m+1,m} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ h_{m+1} \mathbf{e}_m^{(m)T} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}_m^{(m)} = [0, \dots, 1]^T \quad (\mathbf{e}_m^{(m)} \in \mathbf{R}^m).$$

(3) 形成近似解 $\Delta \mathbf{Q}_m^{n+1}$:

$$\Delta \mathbf{Q}_m^{n+1} = \Delta \mathbf{Q}_0^{n+1} + \mathbf{z}^{(m)} \quad (\mathbf{z}^{(m)} \in \mathbf{K}_m) \quad (20)$$

满足 Galerkin 条件:

$$\mathbf{r}^{(m)} \equiv \mathbf{R} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{Q}_m^{n+1} \perp \mathbf{K}_m \quad (21)$$

式(21)满足最小二乘解条件:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}^{(m)}\|_2 &\equiv \|\mathbf{R} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{Q}_m^{n+1}\|_2 \\ &= \min \{ \|\mathbf{R} - \mathbf{A} \Delta \mathbf{Q}_m^{n+1}\|_2 : \mathbf{z} \in \mathbf{K}_m \} \end{aligned} \quad (22)$$

若令 $\mathbf{z}^{(m)} = \mathbf{V}_m \mathbf{y}^{(m)}$, 则式(22)右端极小化泛函可表示为

$$J(\mathbf{y}) = \|\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{A} \mathbf{V}_m \mathbf{y}\|_2 \quad (23)$$

利用式(19)可得

$$\begin{aligned} J(\mathbf{y}) &= \|\mathbf{V}_{m+1} (\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1^{m+1} - \tilde{\mathbf{H}}_m \mathbf{y})\|_2 \\ &= \|\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \mathbf{e}_1^{(m+1)} - \tilde{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}\|_2 \end{aligned} \quad (24)$$

由此式(24)的解为

$$\Delta \mathbf{Q}_m^{n+1} = \Delta \mathbf{Q}_0^{n+1} + \mathbf{V}_m \mathbf{y}^{(m)} \quad (25)$$

式中: $\mathbf{y}^{(m)}$ 为极小化式(24)的 $J(\mathbf{y})$ 。

(4) 重新开始

根据数学上收敛条件 $\|\mathbf{r}^{(m)}\|_2$ 来判定是否终止迭代计算。若 $\|\mathbf{r}^{(m)}\|_2$ 适当小则终止迭代, 否则

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{Q}_0^{n+1} = \Delta \mathbf{Q}_m^{n+1} \\ \mathbf{v}^{(1)} = \frac{\mathbf{r}^{(m)}}{\|\mathbf{r}^{(m)}\|_2} \end{cases} \quad (26)$$

回到步骤(2)进行重新迭代,直至满足步骤(4)中的收敛条件。

5 算例与分析

为了研究 p 型多重网格方法中, $DG(p_0)$ 层上分别采用 LU-SGS、GMRES 不同隐式迭代方法的整体加速性能, 分别对绕 NACA0012 翼型和 ONERA M6 机翼的跨音速无粘流动进行数值模拟, 并和 TVD-RKDG 方法进行比较, 来验证 $DG(p_0)$ 层上的不同隐式策略的 p 型多重网格方法加速收敛效果和精度。算例中使用的计算机基本配置 CPU 为酷睿 I5 3.2 GHz、内存为 4 G, 所有网格均采用 Delaunay 方法生成。

NACA0012 翼型的流动计算状态为: $Ma_\infty = 0.8$, 攻角 $\alpha = 1.25^\circ$ 。计算的整个流场包含 3 531 个网格节点, 6 789 个网格单元, 计算网格如图 1 所示。

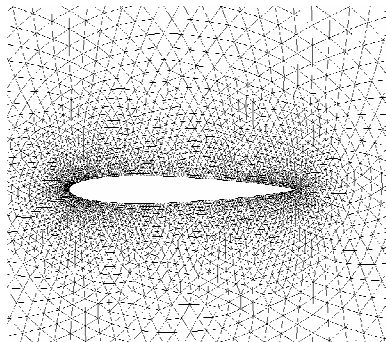
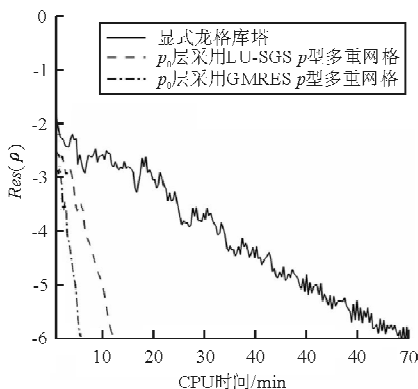


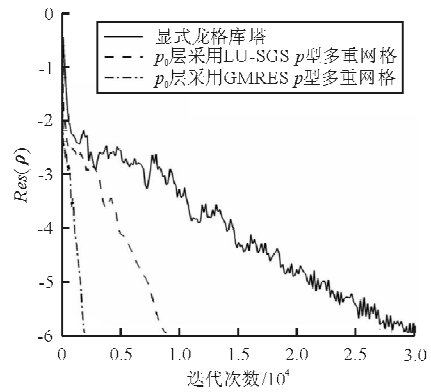
图 1 NACA0012 翼型计算网格

Fig. 1 Computational grid of NACA0012 airfoil

关于 CPU 时间和迭代步数的密度最大残值收敛历程对比如图 2 所示。



(a) CPU 时间



(b) 迭代步数

图 2 NACA0012 翼型残值收敛历程比较

Fig. 2 Comparison of convergence history versus of NACA0012 airfoil

从图 2 可以看出: 当采用 TVD-RKDG 方法时, 计算耗时约 70 min; 当采用 LU-SGS 隐式迭代方法时, 计算耗时约 12 min, 计算效率提高 6 倍左右; 而采用 GMRES 隐式迭代方法时, 计算耗时约 6 min, 计算效率提高 12 倍左右。

ONERA M6 机翼的流动计算状态为: $Ma_\infty = 0.84$, 攻角 $\alpha = 3.06^\circ$ 。计算的整个流场包含 21 019 个网格节点和 99 350 个网格单元。机翼表面网格如图 3 所示。

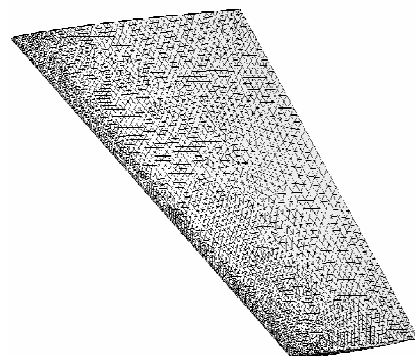


图 3 M6 机翼表面网格

Fig. 3 Surface mesh of M6 wing

采用 p 型多重网格方法计算后的机翼上表面压力等值线如图 4 所示, 可以看出, λ 状激波结构非常清晰, 外弦和内弦激波大约在展长 87% 处相交, 在 94% 处又分开, 和实验结果^[14]基本吻合。

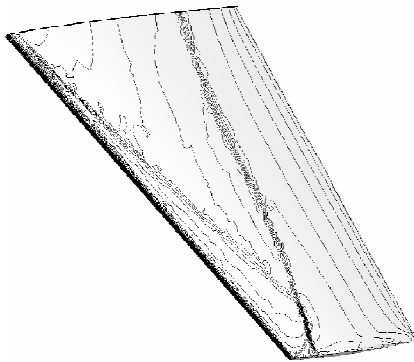
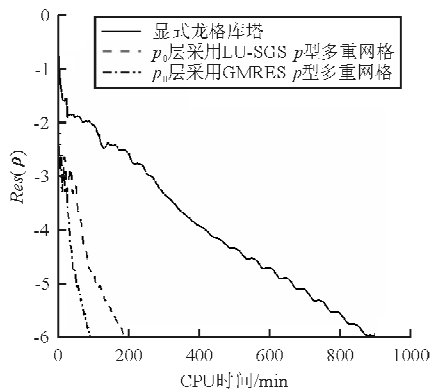


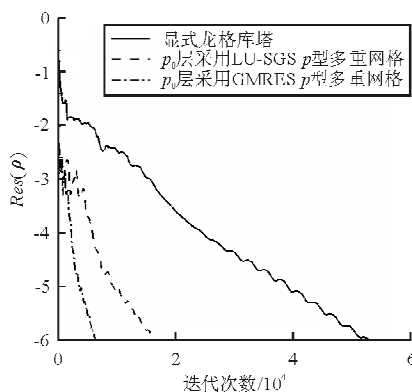
图4 M6机翼上表面压力等值线

Fig. 4 Pressure isolines on upper surface of M6 wing

关于CPU时间和迭代步数的密度最大残值收敛历程对比如图5所示。



(a) CPU时间



(b) 迭代步数

图5 M6机翼残值收敛历程比较

Fig. 5 Comparison of convergence history versus of M6 wing

从图5可以看出:当采用TVD-RKDG方法时,计算耗时约900min;当采用LU-SGS隐式迭

代方法时,计算耗时约200min,计算效率提高4.5倍左右;而采用GMRES隐式迭代方法时,计算耗时约100min,计算效率提高9倍左右。

6 结论

(1) 本文研究了 $DG(p_0)$ 层上采用不同的隐式迭代方法对 p 型多重网格方法整体加速性能的影响,其中隐式迭代方法选择了在FVM中被广泛使用的LU-SGS和GMRES方法。通过对NACA0012翼型和M6机翼跨音速无粘流动的数值模拟,验证了本文方法的加速收敛效果。

(2) $DG(p_0)$ 层上采用不同的隐式迭代方法对 p 型多重网格方法整体加速性能影响比较明显;与显式TVD-RKDG时间格式相比,LU-SGS隐式迭代方法和GMRES隐式迭代方法均可显著提高收敛速度,其中GMRES隐式迭代方法的性能最佳,计算效率提高约10倍;LU-SGS隐式迭代方法次之,计算效率提高约5倍。

参考文献

- [1] Reed W H, Hill T R. Triangle mesh methods for the Neutron transport equation[R]. LA-UR-73-479, 1973.
- [2] Cockburn B, Hou S, Shu C W. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. IV. the multidimensional case[J]. Mathematics of Computation, 1990, 54: 545-581.
- [3] Cockburn B, Shu C W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2001, 16(3): 173-261.
- [4] Wang Z J. High-order methods for the Euler and Navier-Stokes equations on unstructured grids[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2007, 43(1-3): 1-41.
- [5] Ronquist E M, Patera A T. Spectral element multigrid I: formulation and numerical results[J]. Journal of Scientific Computing, 1987, 2(4): 389-406.
- [6] Bassi F, Ghidoni A, Rebay S, et al. High-order accurate p -multigrid discontinuous Galerkin solution of the Euler equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2009, 60(8): 847-865.
- [7] Fidkowski K J, Oliver T A, Lu J, et al. p -multigrid solution of high-order discontinuous Galerkin discretizations of the compressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 207(1): 92-113.
- [8] Luo H, Baum J D, Löhner R. A p -multigrid discontinuous Galerkin method for the Euler equations on unstructured grids[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 211(2):

- 767-783.
- [9] Luo H, Baum J D, Löhner R. Fast p -multigrid discontinuous Galerkin method for compressible flows at all speeds [C]. AIAA Journal, 2008, 46(3): 635-652.
- [10] 郝海兵, 杨永. 非结构网格上 p 型多重网格法流场数值模拟[J]. 计算力学学报, 2011, 28(3): 360-365.
Hao Haibing, Yang Yong. The research of p -multigrid solution for discontinuous Galerkin method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(3): 360-365. (in Chinese)
- [11] 郝海兵, 杨永, 左岁寒. 高阶间断 Galerkin 方法求解三维欧拉方程的研究[J]. 西北工业大学学报, 2011, 29(1): 128-132.
Hao Haibing, Yang Yong, Zuo Suihan. Effectively applying high-order discontinuous Galerkin method (DGM) to solving 3-D Euler equations on unstructured grids[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2011, 29(1): 128-132. (in Chinese)
- [12] Jameson A, Yoon S. Lower-upper implicit schemes with multiples grids for the Euler equations[J]. AIAA Journal, 1987, 25(7): 929-935.
- [13] Saad Y, Schultz M H. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems [J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1986, 7(3): 856-869.
- [14] Barth T J. A 3-D upwind Euler solver for unstructured meshes[C]. AIAA-91-1548-CP, 1991.

作者简介:

李广佳(1979—),男,硕士,高级工程师。主要研究方向:计算流体力学、飞行器设计。

郝海兵(1981—),男,博士,高级工程师。主要研究方向:理论与计算流体力学、气动优化设计。

陈智(1986—),女,工程师。主要研究方向:计算流体力学。

张强(1979—),男,博士,副教授。主要研究方向:理论与计算流体力学。

(编辑:马文静)

(上接第 272 页)

- [55] Yang Zhaoning, Luo Fa, Xu Jiansheng, et al. Dielectric and microwave absorption properties of $\text{LaSrMnO}_3/\text{Al}_2\text{O}_3$ ceramic coatings fabricated by atmospheric plasma spraying [J]. Journal of Alloys and Compounds, 2016, 662(7): 607-611.
- [56] Duan Yuping, Pang Huifang, Zhang Yahong, et al. Morphology-controlled synthesis and microwave absorption properties of $\beta\text{-MnO}_2$ microncube with rectangular pyramid [J]. Materials Characterization, 2016, 112(5): 206-212.
- [57] Guan Hongtao, Chen Gang, Zhang Shubo, et al. Microwave absorption characteristics of manganese dioxide with different crystalline phase and nanostructures [J]. Materials Chemistry and Physics, 2010, 124(1): 639-645.
- [58] Chen Tingting, Sun Genban, Ma Shulan, et al. Solvothermal synthesis of monodispersed $\text{CoZr}_4(\text{PO}_4)_6$ microspheres and their application as microwave absorber[J]. Materials Research Bulletin, 2012, 47(3): 602-607.
- [59] Zhao Dong, Luo Fa, Zhou Wancheng, et al. Microwave absorption properties and complex permittivity of $\text{Fe}/\text{FeAl}_2\text{O}_4$ coatings deposited by reactive plasma spraying $\text{Al}/\text{Fe}_2\text{O}_3$ powders[J]. Surface & Coatings Technology, 2011, 205(17): 4254-4259.
- [60] Zhou Liang, Zhou Wancheng, Chen Malin, et al. Dielectric and microwave absorbing properties of low power plasma sprayed $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Nb}$ composite coatings[J]. Materials Science and Engineering B, 2011, 176(18): 1456-1462.
- [61] 李鹏, 周万城, 李玉琴, 等. Ni/ZrO_2 复合材料力学及介电性能研究 [J]. 稀有金属材料与工程, 2008, 37(11): 1934-1937.
Li Peng, Zhou Wancheng, Li Yuqin, et al. Mechanical and microwave dielectric properties of Ni/ZrO_2 composite [J]. Rare Metal Materials and Engineering, 2008, 37(11): 1934-1937. (in Chinese)

作者简介:

邓凯文(1983—),女,工程师。主要研究方向:航空发动机材料与制造。

刘智(1980—),男,硕士,工程师。主要研究方向:航空发动机制造技术。

(编辑:马文静)