

文章编号:1674-8190(2017)02-135-08

基于 EFG 法的可伸缩梁结构动力学分析

谢丹, 赖梦恬, 蹇开林

(重庆大学 航空航天学院, 重庆 400044)

摘要: 传统有限元法在处理时变边界、时变系数的轴向可伸缩梁时需要不断改变单元尺寸或单元数目, 不利于程序化且计算精度无法保证。基于广义移动最小二乘(GMLS), 采用不受单元限制的全域插值 EFG 法对柔性梁的变形场进行空间离散, 根据哈密尔顿变分原理得到轴向可伸缩梁横向振动的无单元动力学离散方程; 采用数值算例分析可伸缩梁的横向振动频率、各种轴向运动规律下梁末端的自由振动响应以及强迫振动响应。结果表明: 全域插值 EFG 法可用于时变参数结构的动力学分析。

关键词: 时变系统; 伸缩梁; 数值分析; EFG 法; 结构动力学

中图分类号: O313.7

文献标识码: A

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.2017.02.004

Dynamic Analysis of an Axially Deploying or Retracting Flexible Beam Based on the EFG Method

Xie Dan, Lai Mengtian, Jian Kailin

(College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Dealing with the time-varying parameter system of an axially deploying or retracting flexible beam in the traditional FEM, it is necessary to change the element size and numbers constantly, which is not suitable for programming and cannot ensure the computational accuracy. Based on the generalized moving least squares (GMLS), an improved global interpolating element-free Galerkin(EFG) method is applied to dynamics analysis of an axially deploying or retracting flexible beam. The element-free transverse vibration equations are built according to the Hamilton principle. The frequency characteristics, free vibration with different axially motion and the forced vibration response of the beam are calculated in numerical examples. By comparing with the reported available results, the feasibility of the EFG method applied for the time-varying parameter systems is verified.

Key words: the time-varying parameter system; the deploying and retracting beam; numerical analysis; element-free Galerkin(EFG) method; structure dynamics

0 引言

航空航天器上的柔性附件(例如各种天线、伸缩变形机翼、柔性太阳帆板等), 其伸展过程的动力学特性一直备受关注。柔性结构处于大范围轴向运动下通常会诱发横向振动, 具有时变边界、时变

系数的轴向可伸缩梁是典型的柔性附件模型, 其做大范围运动时动力响应的数值分析是航天器动力学研究中的重要内容。例如, M. Stylianou 等^[1]对轴向运动梁进行了有限元分析; 冯志华等^[2]研究了直线运动梁在组合参数共振及内共振联合激励下的非线性动力学行为; 杨晓东等^[3]引入粘弹性本构关系, 分析了变速轴向运动梁的动态稳定性问题; J. R. Chang 等^[4]将 Rayleigh 梁模型与 Euler 梁模型进行了对比分析; 黄建亮等^[5]在模型中考虑了纵向变形的影响, 研究了纵横耦合下梁的非线性振动。

收稿日期: 2016-12-14; 修回日期: 2017-03-27

基金项目: 国家自然科学基金和中国工程物理研究院联合基金(11176035)

通信作者: 蹇开林, cqjian@cqu.edu.cn

目前,关于此类柔性结构动力学问题的数值求解,现有的研究大都基于修正伽辽金法^[6]、假设模态法^[7]、变单元长度或数目的有限元法^[8]、以及采用有限元“节点生死”思想^[9]处理边界条件等。然而,修正伽辽金法或假设模态法仅适用于简单且形状规则的结构,而传统有限元在处理时变边界的轴向可伸缩梁时,需要不断改变单元尺寸或单元数目,不利于程序化、计算精度也无法保证。

近年来,无网格法以其独特的优势得到了国内外各领域的广泛研究。该方法通过一组无需事先定义、散布在问题域及边界上的节点表示问题域及边界,用场节点构造近似的总体函数,可以彻底或部分消除网格,在处理可变边界时具有很大优势。T. Sonar^[10]和 G. R. Liu^[11]分别对无网格法的相关研究进展进行了较为详细的综述。在众多无网格法中,T. Belytschko 等^[12]提出的基于移动最小二乘(MLS)的 EFG 法以其高精度及简明的变换关系得到了广泛的研究与应用。T. Belytschko 等^[13]还利用 EFG 法研究了结构的断裂问题;J. Dolbow 等^[14]详细介绍了 EFG 法的计算流程及相关子程序;M. Hajiazizi 等^[15]采用 EFG 法进行了结构弹塑性分析,并与传统有限元及有限差分法进行了对比。然而,采用 MLS 的传统 EFG 法由于形函数不满足插值特性,边界条件难以施加。针对该问题,J. S. Chen 等^[16]在重构核近似中通过变换法得到具有插值特性的形函数;D. Garijo 等^[17]则通过变换法得到具有插值特性的 IMLS 形函数,但导数边界的施加仍很困难;D. Xie 等^[18]进一步采用广义移动最小二乘(GMLS),得到具有全域插值特性的 IGMLS 形函数,并将其用于具有导数边界的梁、板结构的动力学分析。

本文将具有全域插值特性的 IGMLS 形函数用于时变参数梁的空间离散,通过哈密顿原理得到可伸缩梁横向振动的无单元离散方程,在此基础上对可伸缩梁的横向振动频率特性以及各种轴向运动规律下梁的自由振动及强迫振动响应进行数值计算。

1 可伸缩梁横向振动控制方程

采用不考虑剪切变形和转动惯量的欧拉梁(细

长梁)模型,梁的体积密度为 ρ ,横截面积为 A ,弹性模量为 E ,横截面惯性矩为 I 。可伸缩悬臂梁模型如图 1 所示,取刚性滑槽端部为坐标原点建立固定坐标系 xOy 。

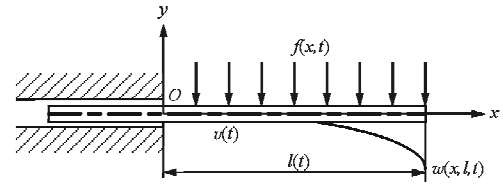


图 1 可伸缩悬臂梁模型

Fig. 1 Schematic of an axially moving cantilever beam

轴向运动梁悬臂段的长度 $l(t)$ 随时间变化,初始长度为 l_0 ,轴向速度 $v(t)$ 为正,表示梁处于伸展状态,轴向速度 $v(t)$ 为负,表示梁处于收缩状态,轴向运动加速度 \dot{v} 为常数。由此可得梁的轴向运动速度与伸展长度的关系为

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + \dot{v}t \\ l(t) = l_0 + v_0t + 0.5\dot{v}t^2 \end{cases} \quad (1)$$

则梁中线上距离坐标原点 x 处的横向位移为 $w[x(t), l(t), t]$ 。

仅考虑横向振动,系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^{l(t)} \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx \quad (2)$$

式中: $\frac{dw}{dt} = v \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial t}$ 。

根据线弹性应力应变关系,系统势能为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{l(t)} \left[EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (3)$$

式中: P 为梁的轴向张力, $P = -\rho A(l-x)\dot{v}$ 。

横向外力做功为

$$W = \int_0^{l(t)} f(x,t) w(x,l,t) dx \quad (4)$$

根据哈密顿变分原理 $\int_{t_1}^{t_2} (\delta \Pi - \delta T - \delta W) dt = 0$,将式(2)~式(4)分别代入,通过分部积分可得可伸缩悬臂梁的横向振动控制方程:

$$\rho A \frac{d^2 w}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial w}{\partial x} \right) + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f(x,t) \quad (5)$$

式中:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + v^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + \dot{v} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)。$$

边界条件为

$$\begin{cases} w(0,t) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l,t) = 0 \\ P(l,t) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

(即转角) $w'_I = \theta_I$, 关于广义移动最小二乘的构造不再赘述。若用 Ω 表示梁的 GMLS 形函数, $\Omega_{,x}$ 表示 GMLS 形函数的一阶导数, 基于节点位移参数的挠度及转角的近似表达式为

$$\begin{cases} w^h(x) = \sum_{I=1}^N \phi_I w_I + \sum_{I=1}^N \psi_I \theta_I = \Omega \bar{d} \\ \theta^h(x) = \sum_{I=1}^N \phi_{I,x} w_I + \sum_{I=1}^N \psi_{I,x} \theta_I = \Omega_{,x} \bar{d} \end{cases} \quad (7)$$

传统 EFG 法的形函数构造基于节点位移参数, 故边界条件施加困难。通过真实节点位移矢量 d 与节点位移参数矢量 \bar{d} 的关系:

$$d = \Lambda \bar{d} \quad (8)$$

2 EFG 法动力学离散方程

2.1 全域插值广义移动最小二乘

假设欧拉梁的求解域 $0 \leq x \leq l(t)$ 被 N 个场节点 $x_I (I=1, 2, \dots, N)$ 离散, 挠度变量的一阶导数值

$$\Lambda_{(2N \times 2N)} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_N(x_1) & \psi_1(x_1) & \cdots & \psi_N(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \cdots & \phi_N(x_N) & \psi_1(x_N) & \cdots & \psi_N(x_N) \\ \phi_{1,x}(x_1) & \cdots & \phi_{N,x}(x_1) & \psi_{1,x}(x_1) & \cdots & \psi_{N,x}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1,x}(x_N) & \cdots & \phi_{N,x}(x_N) & \psi_{1,x}(x_N) & \cdots & \psi_{N,x}(x_N) \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: Λ 为转换矩阵。

将式(7)~式(8)代入式(5), 得到基于真实节点位移的全域插值形函数:

$$\begin{cases} w^h(x) = \Omega \bar{d} = \Omega \Lambda^{-1} d = N d \\ \theta^h(x) = \Omega_{,x} \bar{d} = \Omega_{,x} \Lambda^{-1} d = N_{,x} d \end{cases} \quad (10)$$

由此可得, 梁的 IGMLS 形函数及其一阶导数的表达式为

$$\begin{cases} N = \Omega \Lambda^{-1} \\ N_{,x} = \Omega_{,x} \Lambda^{-1} \end{cases} \quad (11)$$

梁中间节点的 IGMLS 形函数曲线如图 2 所示。

2.2 动力学离散方程

定义变量 $\xi(t) = x(t)/l(t)$, 由此, 变量 x 的时变域 $[0, l(t)]$ 便可转化为相对 ξ 的固定域 $[0, 1]$ 。根据 EFG 法形函数的推导, 梁横向变形的离散表达式为

$$\omega(x, l, t) = N\left(\frac{x}{l}\right) q(t) = N(\xi) q(t) \quad (12)$$

式中: $N(\xi) \in \mathbf{R}^{1 \times 2N}$ 为横向位移的 IGMLS 形函数;

$q(t) \in \mathbf{R}^{2N}$ 为由挠度与转角组成的节点坐标列向量。

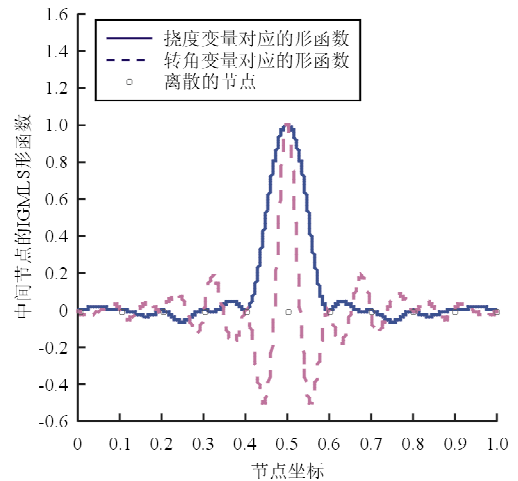


图 2 IGMLS 形函数

Fig. 2 The global IGMLS shape function

$$q(t) = \{w_1(t), \dots, w_N(t), \theta_1(t), \dots, \theta_N(t)\}^T \quad (13)$$

根据式(11), 可知:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{1}{l^2} N^r q \\ \delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) &= \frac{1}{l^2} N^r \delta q \\ \dot{w} &= \dot{N}q + N\dot{q} \\ \ddot{w} &= N\ddot{q} + 2\dot{N}\dot{q} + \dot{N}q \\ N^r &= \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ N^r &= \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2}\end{aligned}$$

由 $\dot{\xi} = \frac{v}{l}(1-\xi)$, 可得:

$$\begin{aligned}\dot{N} &= \frac{v}{l}(1-\xi)N^r \\ \ddot{N} &= \frac{\dot{v}}{l}(1-\xi)N^r + \frac{v^2}{l^2}[-2(1-\xi)N^r + (1-\xi)^2 N^r]\end{aligned}$$

将上述表达式代入哈密顿变分原理, 并利用 $\int_0^{l(t)} dx = \int_0^1 l d\xi$, 得到可伸缩悬臂梁横向振动的无网格离散方程:

$$M(t)\ddot{q}(t) + C(t)\dot{q}(t) + K(t)q(t) = F(t) \quad (14)$$

$$M(t) = l(t) \int_0^1 \rho A N^T N d\xi \quad (15)$$

$$C(t) = \int_0^1 2\rho A v(1-\xi) N^T N^r d\xi \quad (16)$$

$$K(t) = K_e(t) + K_v(t) + K_a(t) + K_p(t) \quad (17)$$

$$\begin{cases} K_e(t) = \frac{1}{l^3(t)} \int_0^1 E I N^{rT} N^r d\xi \\ K_v(t) = -\frac{2}{l(t)} \int_0^1 \rho A v^2 (1-\xi) N^T N^r d\xi + \\ \frac{1}{l(t)} \int_0^1 \rho A v^2 (1-\xi)^2 N^T N^r d\xi \end{cases} \quad (18)$$

$$K_a(t) = \int_0^1 \rho A v(1-\xi) N^T N^r d\xi$$

$$K_p(t) = \frac{1}{l(t)} \int_0^1 P N^T N^r d\xi$$

$$F(t) = l(t) \int_0^1 N^T f(\xi, t) d\xi \quad (19)$$

3 数值算例

为了验证 EFG 法离散模型的合理性, 数值分析中的模型参数采用已被其他方法或实验验证过的参数。梁的基本参数: 初始长度 $l_0 = 1.8$ m, 横截面积 $A = 1.4661 \times 10^{-3}$ m², 材料密度 $\rho = 2.7386 \times$

10^3 kg/m³, 弹性模量 $E = 6.8335 \times 10^{10}$ Pa, 横截面惯性矩 $I = 1.1073 \times 10^{-8}$ m⁴。

3.1 横向振动频率分析

由于空间离散方程(式(13))含有伪阻尼, 引入空间变量 $\bar{Z}(t) = \{\dot{q}(t)^T, q(t)^T\}^T$, 并将 $M\dot{q}(t) - M\dot{q}(t) = 0$ 与式(13)联立得到:

$$\bar{M}\dot{\bar{Z}} + \bar{K}\bar{Z} = 0 \quad (20)$$

$$\text{式中: } \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}; \bar{K} = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}。$$

设复特征值 λ , 将 $\bar{Z}(t) = Z e^{\lambda t}$ 代入式(19), 得到特征方程:

$$|\lambda \bar{M} + \bar{K}| = 0 \quad (21)$$

当没有轴向运动时, 该模型为普通悬臂梁, 经计算, 在初始长度下其一、二阶固有频率分别为 14.90 rad/s (2.37 Hz)、93.36 rad/s (14.86 Hz)。当存在轴向运动时, 由于梁长度的改变将不存在固有频率与振型, 以下研究梁以 $v_0 = 0.3$ m/s 匀速伸展时的频率特性。

用 21 个节点离散梁结构, 影响域因子取 2.5, 采用四点高斯积分。一、二阶频率的时变曲线如图 3 所示。

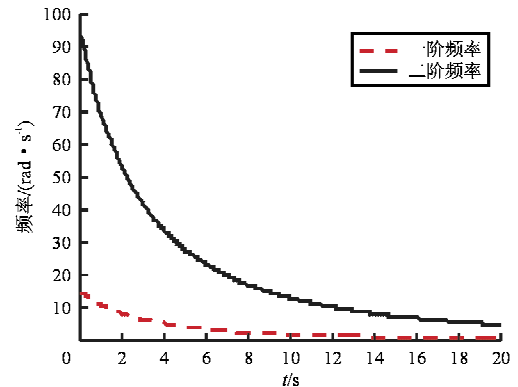


图 3 伸展梁的一、二阶频率曲线

Fig. 3 The first two frequencies of axially moving beam

从图 3 可以看出: 初始时刻与理论解吻合, 随着时间的推移, 梁的长度不断加长, 频率也呈递减趋势。

$[0, 1]$ 空间下一阶振型分别在 0、5、10、15 和 20 s 时刻的曲线如图 4 所示。

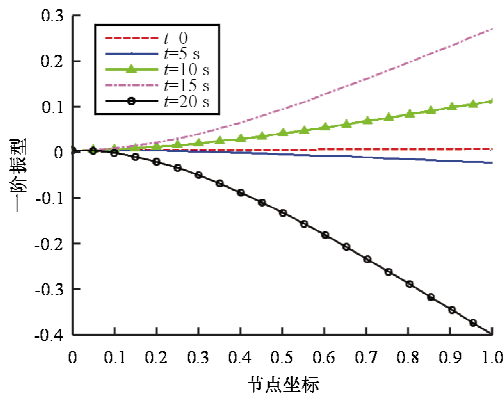


图 4 一阶振型变化曲线

Fig. 4 The first order vibration shapes

从图 4 可以看出:振型的时变性主要体现在变形程度上,且伸展梁的瞬时频率、瞬时振型分别为相应时刻下伸展长度的悬臂梁的固有频率、固有振型。

3.2 各种运动规律下的自由振动

采用广义 α 法时域离散,参数 $\alpha_m = \frac{1}{2}, \alpha_f = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$ 。离散节点数为 11,影响域因子为 2.5。零时刻梁末端的挠度为 -0.005 m,分别按照以下运动规律分析计算梁自由端在该初始条件下的响应。

(1) 匀速伸展: $l_0 = 1.8$ m, $v_0 = 0.3$ m/s。匀加速伸展时梁末端的位移响应曲线如图 5 所示。

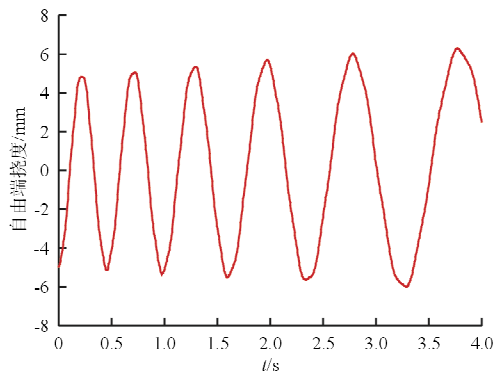


图 5 匀速伸展时梁末端位移响应

Fig. 5 The tip deflection of expanding beam

从图 5 可以看出:振动振幅逐渐增大,频率减小,计算结果与文献[8]吻合。

(2) 匀速收缩: $l_0 = 1.8$ m, $v_0 = -0.3$ m/s。

匀速收缩时梁末端的位移响应如图 6 所示。

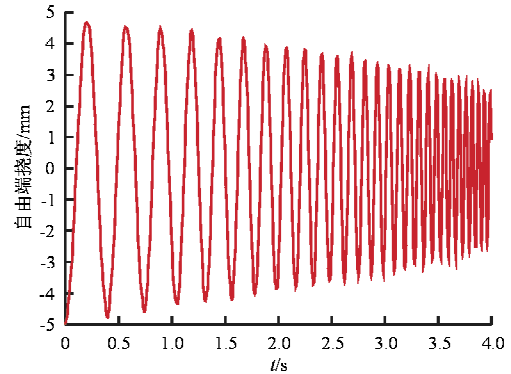


图 6 匀速收缩时梁末端位移响应

Fig. 6 The tip deflection of retracting beam

从图 6 可以看出:收缩时振幅逐渐减小,频率却增大。

(3) 匀加速伸展: $l_0 = 1.8$ m, $v_0 = 0, \dot{v}_0 = 0.2$ m/s²。匀加速伸展时梁末端的位移响应如图 7 所示。

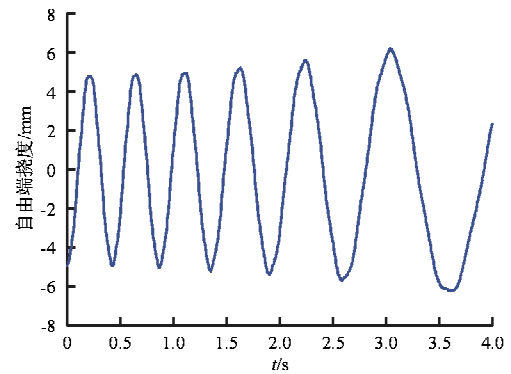


图 7 匀加速伸展时梁末端位移响应

Fig. 7 The tip deflection of expanding beam with a constant acceleration

通过与图 5 进行对比,可以看出:在相同时间内,加速度的作用明显加快了梁的伸展运动,符合实际情况。

(4) 匀加速收缩: $l_0 = 1.8$ m, $v_0 = 0, \dot{v}_0 = -0.2$ m/s²。匀减速收缩时梁末端的位移响应如图 8 所示。

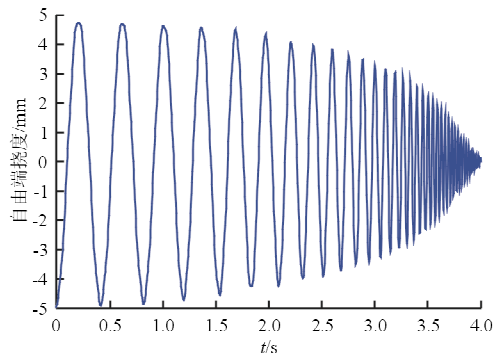


图 8 匀减速收缩时梁末端位移响应
Fig. 8 The tip deflection of retracting beam with a constant acceleration

通过与图 6 进行对比,可以看出:在相同时间内,加速度的作用明显加快了梁的收缩运动。

(5) 先伸展再收缩: $l_0 = 0.5 \text{ m}$, $v_0 = 1 \text{ m/s}$, $\dot{v}_0 = -0.2 \text{ m/s}^2$ 。先伸展再收缩时梁末端的位移响应如图 9 所示。

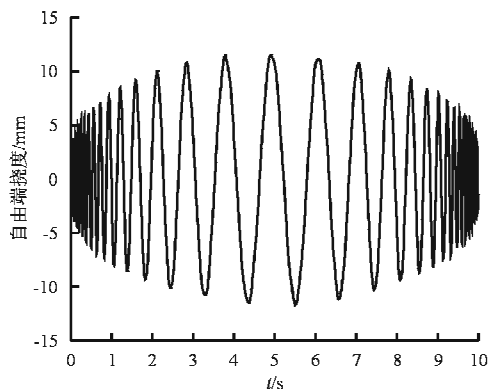


图 9 先伸展再收缩时梁末端位移响应
Fig. 9 The tip deflection of beam expanding firstly and then retracting

从图 9 可以看出:梁在伸展过程中做频率减小、振幅逐渐增大的横向振动;到 5 s 时,幅值达到最大,此时梁由伸展开始收缩,振幅逐渐减小、振动频率则逐渐增大。

(6) 先收缩再伸展: $l_0 = 0.5 \text{ m}$, $v_0 = 1 \text{ m/s}$, $\dot{v}_0 = 0.2 \text{ m/s}^2$ 。先收缩再伸展时梁末端的位移响应如图 10 所示。

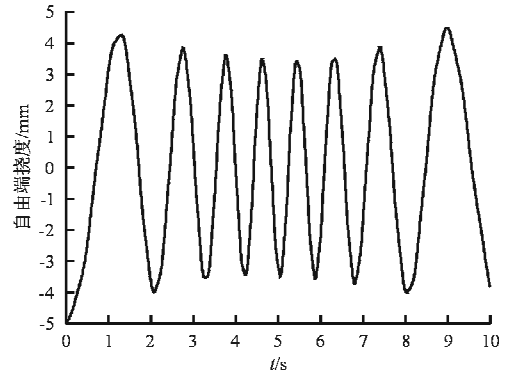


图 10 先收缩再伸展时梁末端位移响应
Fig. 10 The tip deflection of beam retracting firstly and then expanding

从图 10 可以看出:与图 9 的情况正好相反,梁先做振幅逐渐减小、振动频率逐渐增大的横向振动;到 5 s 时,幅值达到最小,此时梁由收缩开始伸展,频率减小、振幅则逐渐增大。

(7) 伸缩运动: $l(t) = l_0 + \sin(0.6t)$, $l_0 = 4 \text{ m}$ 。伸缩运动时梁末端的位移响应如图 11 所示。

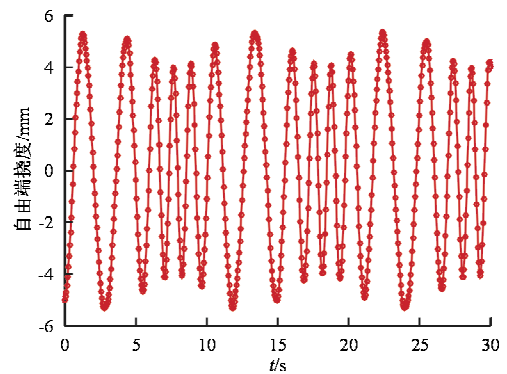


图 11 正弦规律下梁末端位移响应
Fig. 11 The tip deflection of beam with a simple harmonic motion

从图 11 可以看出:由于梁在正弦运动规律下做周期性的伸展收缩运动,梁的横向振动也呈周期性变化。

(8) 不同速度下的匀速伸展运动: $l_0 = 1.8 \text{ m}$, v_0 分别为 0.3、0.5 和 0.8 m/s。不同速度下伸展时梁末端的位移响应如图 12 所示,可以看出:伸展速度越大,振幅增大越快。

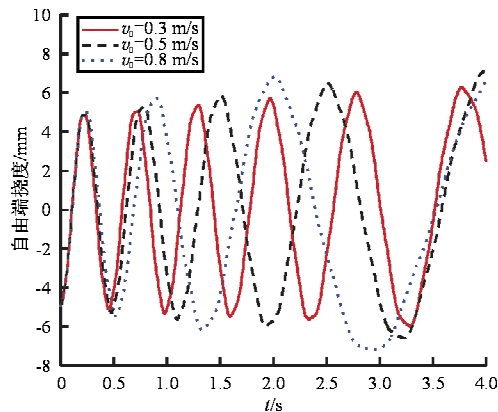


图 12 不同速度下伸展时梁末端位移响应

Fig. 12 The tip deflection of expanding beam with different velocities

3.3 强迫振动响应

假设梁上作用有均布外载荷 $f(x, t) = 0.5\sin(10t)$ N, 梁的激励频率为 10 rad/s, 梁末端的响应如图 13 所示。

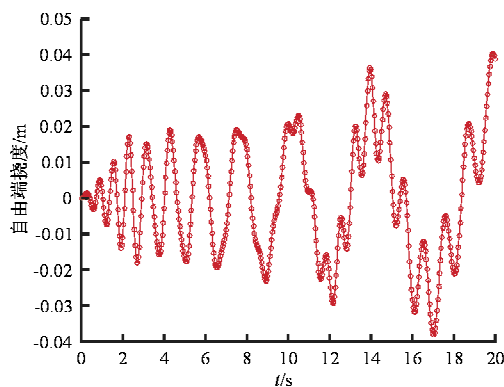


图 13 强迫振动响应

Fig. 13 The tip deflection of beam under forced vibration

从图 13 可以看出:时变伸缩梁在强迫振动下并没有像传统结构动力学中出现明显的共振区,根据梁的瞬时频率曲线(图 3),梁在 20 s 内经历了两次共振,第一次共振出现在 1.3 s 左右,激励频率接近结构的一阶瞬时频率;第二次共振出现在 12.3 s 左右,激励频率接近结构的二阶瞬时频率。

4 结 论

(1) 在处理时变边界结构时,基于全域点插值

的 EFG 法克服了常规有限元法的不足,且位移及导数边界条件均可像常规有限元法一样直接施加。

(2) 可伸缩梁频率域振型的时变性源于轴向运动引起的梁长度的改变。梁伸展时振动振幅逐渐增大且频率减小,伸展速度越大振幅增大越快;收缩时振幅减小、频率增大。数值计算结果与现有研究结论相吻合,验证了 EFG 法用于更复杂时变参数连续结构动力学分析的可行性。

参考文献

- [1] Stylianou M, Tabarrok B. Finite element analysis of an axially moving beam, part I — time integration[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 178(4): 433-453.
- [2] 冯志华, 胡海岩. 直线运动柔性梁非线性动力学——组合参数共振与内共振联合激励[J]. *振动工程学报*, 2004, 17(3): 253-257.
Feng Zhihua, Hu Haiyan. Nonlinear dynamics of flexible beams undergoing a large linear motion of basement: combinational parametric and internal resonances[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(3): 253-257. (in Chinese)
- [3] 杨晓东, 陈立群. 变速度轴向运动粘弹性梁的动态稳定性[J]. *应用数学与力学*, 2005, 26(8): 905-910.
Yang Xiaodong, Chen Liqun. Dynamic stability of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, 26(8): 905-910. (in Chinese)
- [4] Chang J R, Lin W J, Huang C J, et al. Vibration and stability of an axially moving Rayleigh beam[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34(6): 1482-1497.
- [5] 黄建亮, 陈树辉. 纵向与横向振动耦合作用下轴向运动梁的非线性振动研究[J]. *振动与冲击*, 2011, 30(8): 24-27.
Huang Jianliang, Chen Shuhui. Study on nonlinear vibration of an axially moving beam with coupled transverse and longitudinal motions[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, 30(8): 24-27. (in Chinese)
- [6] Wang L H, Liu Z D, Zhong Z, et al. Hamiltonian dynamic analysis of an axially translating beam featuring time-variant velocity[J]. *Acta Mechanica*, 2009, 206(3): 149-161.
- [7] 赵亮, 胡振东. 轴向运动功能梯度悬臂梁动力学分析[J]. *振动与冲击*, 2016, 35(2): 124-128.
Zhao Liang, Hu Zhendong. Dynamic analysis of an axially translating functionally graded cantilever beam[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(2): 124-128. (in Chinese)
- [8] Al-Bedoor B O, Khulief Y A. Finite element dynamic modeling of a translating and rotating flexible link[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 131(1/2): 173-189.
- [9] 罗炳华, 高跃飞, 刘荣华, 等. 轴向运动梁受移动载荷作用

- 的横向动力响应[J]. 振动与冲击, 2011, 30(12): 59-63.
- Luo Binghua, Gao Yuefei, Liu Ronghua, et al. Lateral dynamic response of an axially moving beam under a moving load[J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(12): 59-63. (in Chinese)
- [10] Sonar T. Meshless methods; an overview and recent developments[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 139(1-4): 3-47.
- [11] Liu G R. An overview on meshfree methods; for computational solid mechanics[J]. International Journal of Computational Methods, 2016, 13(5): 41-42.
- [12] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229-256.
- [13] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L, et al. Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture[J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, 32(17/18): 2547-2570.
- [14] Dolbow J, Belytschko T. An introduction to programming the meshless element free Galerkin method[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 1998, 5(3): 207-241.
- [15] Hajiazizi M, Bastan P. The elastoplastic analysis of a tunnel using the EFG method; a comparison of the EFGM with FEM and FDM[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 234: 82-113.
- [16] Chen J S, Pan C, Wu C T, et al. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4): 195-227.
- [17] Garijo D, Valencia Ó F, Gómez-Escalonilla F J. Global interpolating MLS shape functions for structural problems with discrete nodal essential boundary conditions[J]. Acta Mechanica, 2015, 226(7): 2255-2276.
- [18] Xie D, Jian K L, Wen W B. Global interpolating meshless shape function based on generalized moving least-square for structural dynamic analysis[J]. Applied Mathematics and Mechanics(English Edition), 2016, 37(9): 1153-1176.

作者简介:

谢丹(1987—),女,博士研究生。主要研究方向:结构动力学、多体系统动力学、数值计算方法。

赖梦恬(1992—),男,硕士研究生。主要研究方向:结构动力学、结构振动与控制。

蹇开林(1965—),男,教授,博导。主要研究方向:结构动力学、多体系统动力学、结构振动与控制、结构动力优化、流固耦合等。

(编辑:马文静)