

文章编号:1674-8190(2019)03-376-07

# 变截面旋转裂纹梁横向振动特性的研究

韩伟,毛崎波,田文昊

(南昌航空大学 飞行器工程学院,南昌 330063)

**摘要:**对损伤结构进行动力特性分析是进行无损检测的重要基础,而对于旋转梁结构的裂纹损伤动力特性研究,却鲜有文献涉及。以变截面旋转裂纹梁为研究对象,对其横向振动特性进行研究,提出一种求解变截面旋转裂纹梁横向振动特性的新方法。首先利用扭转弹簧模拟裂纹效应,建立含裂纹梁局部柔度模型,然后采用 Frobenius 方法求解振动方程,得到方程的级数解析解,并研究裂纹位置和深度对振动频率的影响,分析不同损伤程度、不同转速工况下梁的前两阶固有频率变化情况。结果表明:本文方法是有效的,转速和损伤程度的变化并非独立影响梁的固有频率,两者间具有耦合作用机理,对于变截面梁同样成立。

**关键词:**旋转裂纹梁;横向振动;固有频率;耦合作用

**中图分类号:** V214.3;TB123;O327 **文献标识码:** A **DOI:** 10.16615/j.cnki.1674-8190.2019.03.011

## Research on Transverse Vibration Characteristic of Rotating Cracked Beams with Variable Cross-section

Han Wei, Mao Qibo, Tian Wenhao

(School of Aircraft Engineering, Nanchang HangKong University, Nanchang 330063, China)

**Abstract:** The dynamic characteristics analysis of damage structure is an important basis for non-destructive testing. However, there are few literatures concerning the study of dynamic characteristics of rotating cracked beams. Taking rotating cracked beams with variable cross-section as the research object, the transverse vibration characteristics of rotating cracked beams are investigated, and a new method to solve the transverse vibration characteristics of rotating cracked beams is proposed. The torsion spring is used to simulate the crack effect, and the flexibility model of cracked beams model is established. The Frobenius method is used to solve the vibration equation, and obtain the series analytic solution of the equation. The effect of crack position and depth on vibration frequency is studied, and the variation of first two-order natural frequency of beam is analyzed under different damage degrees and speeds. The results show that the proposed method is effective, the change of rotating speed and damage degree do not affect the natural frequency of the beam independently, and there is a coupling mechanism between the two items. The conclusions are suitable for beams with variable cross-section.

**Key words:** rotating cracked beam; transverse vibration; natural frequency; coupling mechanism

收稿日期:2018-05-31; 修回日期:2018-09-17

基金项目:国家自然科学基金项目(11464031,51265037);航空科学基金项目(2015ZA56002)

通信作者:韩伟,1227368164@qq.com

引用格式:韩伟,毛崎波,田文昊. 变截面旋转裂纹梁横向振动特性的研究[J]. 航空工程进展, 2019, 10(3): 376-382.

Han Wei, Mao Qibo, Tian Wenhao. Research on transverse vibration characteristic of rotating cracked beams with variable cross-section[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2019, 10(3): 376-382. (in Chinese)

## 0 引 言

在航空工程中,有很多梁结构处于旋转运动状态,如螺旋桨、涡轮叶片等。这些结构在复杂恶劣的自然环境中长期处于高强度、高负荷运行状态,容易出现裂纹损伤。因此,对这些结构进行健康监测十分必要,以振动测试技术为代表的无损检测技术具有实时、高效、环境适应性强等优点,逐渐引起了国内外众多学者的广泛关注<sup>[1-4]</sup>。而对损伤结构进行动力特性分析是进行无损检测的重要基础。目前大部分研究主要集中在非旋转损伤梁结构的动力特性的研究,如大跨度桥梁、桥式起重机等,而对于螺旋桨、涡轮叶片等旋转梁的裂纹损伤动力特性的研究,至今只有少量文献涉及。

Liu C 等<sup>[5]</sup>提出了一种裂纹六面体有限元法,用于裂纹叶片的动态分析,解决转子系统叶片裂纹建模精度与效率之间的矛盾。乔社宁等<sup>[6]</sup>通过搭建风机在自由悬挂状态下的试验模态分析平台,分别在无裂纹和不同裂纹深度等 8 种情况下对叶片振动特性进行了试验研究。研究表明:离心式风机叶轮结构固有频率随裂纹深度的增加而单调下降,裂纹越深,固有频率下降越快。范博楠等<sup>[7]</sup>研究了叶盘叶片进气及出气边产生的横向贯穿型裂纹的分布位置及深度变化对叶片一阶弯曲振动特性的影响,结果发现:当叶片进气或出气边位置阈值内出现裂纹及扩展时,一阶弯曲振动频率会小于正常值,此时叶片的一阶弯曲共振区域会增大。蒋宪宏等<sup>[8]</sup>对具有刚柔耦合效应的带裂纹旋转柔性梁进行建模和动力学特性分析研究,结果发现:裂纹梁的固有频率与裂纹处的弯矩正相关。J. W. Lee 等<sup>[9]</sup>基于局部柔度模型模拟裂纹效应,用幂级数法结合传递矩阵法求解了含裂纹旋转梁振动特性,并讨论了转速与损伤程度对梁结构振动特性的联合影响机理。但是上述方法主要是针对等截面梁,且过程较为繁琐,计算程序复杂。

本文采用 Frobenius 方法将文献<sup>[9]</sup>等截面梁模型推广到高度和宽度均可按任意比例线型变化的梁体,提出一种求解变截面旋转裂纹梁横向振动特性的新方法,并通过数值算例验证该方法的有效性以及文献<sup>[9]</sup>中的结论,此外还研究裂纹位置和深度对振动特性的影响。

## 1 含裂纹梁局部柔度模型

以旋转悬臂梁为基础建立裂纹梁局部柔度模型,如图 1 所示。梁上含有  $n$  个开口裂纹,第  $i$  个裂纹距梁固定端的距离为  $x_i$ ,深度为  $h_i$ ,由文献<sup>[10]</sup>可知,裂纹可用无质量扭转弹簧模拟。

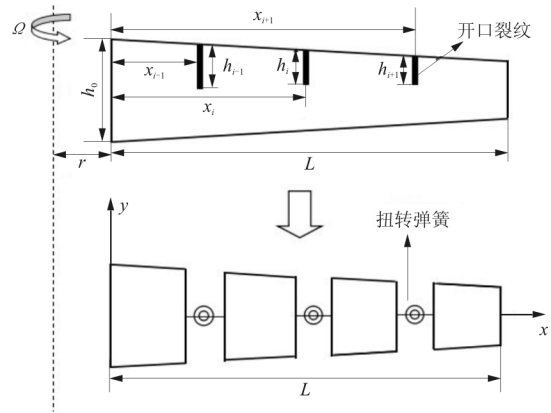


图 1 含裂纹旋转梁局部柔度模型

Fig. 1 Local flexibility model of a rotating cracked beam

梁的长度为  $L$ ,梁的密度和弹性模量分别为  $\rho$ 、 $E$ ,转轴半径为  $r$ ,转速为  $\Omega$ ,梁截面为矩形,其高度  $h(x)$ 和宽度  $b(x)$ 沿  $x$  轴方向减小,可以表示为

$$h(x) = h_0 \left( 1 - c_h \frac{x}{L} \right) \quad (1)$$

$$b(x) = b_0 \left( 1 - c_b \frac{x}{L} \right) \quad (2)$$

式中: $h_0$  和  $b_0$  分别为梁固定端截面的高度和宽度; $c_h$  和  $c_b$  分别为高度和宽度的渐变系数;当  $c_b, c_h$  均为 0 时,为均匀梁。

基于欧拉-伯努利梁理论,第  $i$  段完整梁的横向自由振动微分方程<sup>[11]</sup>为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y_i(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 y_i(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} \right] = 0 \quad (3)$$

$x \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $A(x)$  和  $I(x)$  分别是横截面积和惯性矩,  $T(x)$  是旋转梁所受离心力,可表示为

$$A(x) = b(x)h(x) = A_0 \left( 1 - c_b \frac{x}{L} - c_h \frac{x}{L} + c_b c_h \frac{x^2}{L^2} \right) \quad (4)$$

$$I(x) = \frac{b(x)h^3(x)}{12} = I_0 \left( 1 - c_b \frac{x}{L} \right) \left( 1 - c_h \frac{x}{L} \right)^3 = I_0 \left( 1 + \alpha_1 \frac{x}{L} + \alpha_2 \frac{x^2}{L^2} + \alpha_3 \frac{x^3}{L^3} + \alpha_4 \frac{x^4}{L^4} \right) \quad (5)$$

$$T(x) = \int_x^L [\rho A(x) \Omega^2 (r+x)] dx \quad (6)$$

$$\text{式中: } A_0 = b_0 h_0, I_0 = \frac{b_0 h_0^3}{12}, \alpha_1 = -(c_b + 3c_h), \\ \alpha_2 = 3c_h(c_b + c_h), \alpha_3 = -c_h^2(3c_b + c_h), \alpha_4 = c_b c_h^3$$

## 2 梁振动方程的 Frobenius 方法解

根据振动分析理论可知,梁的横向位移函数可

$$(1 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 + \alpha_4 X^4) \frac{d^4 \Phi(X)}{dX^4} + 2(\alpha_1 + 2\alpha_2 X + 3\alpha_3 X^2 + 4\alpha_4 X^3) \frac{d^3 \Phi(X)}{dX^3} + \\ (2\alpha_2 + 6\alpha_3 X + 12\alpha_4 X^2) \frac{d^2 \Phi(X)}{dX^2} - U^2(\beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3 + \beta_4 X^4) \frac{d^2 \Phi(X)}{dX^2} - \\ U^2(\beta_1 + 2\beta_2 X + 3\beta_3 X^2 + 4\beta_4 X^3) \frac{d\Phi(X)}{dX} - \lambda^2(1 - c_b X - c_h X + c_b c_h X^2) \Phi(X) = 0 \quad (8)$$

$$\text{式中: } X = \frac{x}{L}; U = \sqrt{\frac{\rho A_0 \Omega^2 L^4}{EI_0}}; \Phi(X) = \frac{\phi(x)}{L}; \lambda = \\ \sqrt{\frac{\rho A_0 \omega^2 L^4}{EI_0}}; \beta_0 = \frac{1}{12}[12R + 3c_b c_h - 4(c_b + c_h - \\ c_b c_h R) + 6(1 - c_b R - c_h R)], \text{其中 } R = \frac{r}{L}; \beta_1 = -R, \\ \beta_2 = \frac{1}{2}(c_b R + c_h R - 1); \beta_3 = \frac{1}{3}(c_b + c_h - c_b c_h R); \beta_4 \\ = -\frac{c_b c_h}{4}.$$

根据 Frobenius 方法<sup>[12]</sup>,第  $i$  段完整梁的自由振动位移可以表示为

$$\Phi_i(X) = N_{1i} F_1(X) + N_{2i} F_2(X) + N_{3i} F_3(X) + \\ N_{4i} F_4(X) \quad (9)$$

式中:  $F_j(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(c_j) X^{n+c_j}, j=1,2,3,4; X = x/L$ , 系数  $N_{1i}, N_{2i}, N_{3i}, N_{4i} (i=1,2,3,\dots,n+1)$  可由梁边界条件、裂纹处连续性条件来确定。

裂纹梁边界条件为

$$\begin{cases} \Phi_1(0) = 0 \\ \Phi_1'(0) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \bar{M}_{n+1}(1) = 0 \\ \bar{Q}_{n+1}(1) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

由文献[10]可知,在第  $i$  条裂纹处连续性条件为

$$\begin{cases} \Phi_1(X_i) = \Phi_{i+1}(X_i) \\ \Phi_1'(X_i) + \theta_i \Phi_1''(X_i) = \Phi_{i+1}'(X_i) \\ \bar{M}_i(X_i) = \bar{M}_{i+1}(X_i) \\ \bar{Q}_i(X_i) = \bar{Q}_{i+1}(X_i) \end{cases} \quad (12)$$

分离为空间函数和时间函数,即方程(3)的解具有如下形式:

$$w(x,t) = \phi(x) e^{i\omega t} \quad (7)$$

式中:  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\phi(x)$  和  $\omega$  分别为振型函数和固有频率。

将式(7)代入式(3)进行变量分离并将变量无量纲化,可得

式中:  $X_i$  为裂纹相对位置,  $X_i = x_i/L$ 。  $\theta_i$  为梁的第  $i$  条裂纹引起的无量纲柔度<sup>[13]</sup>。

$$\theta_i = 5.346 h_0 \cdot J(s_i) \quad (13)$$

$$J(s_i) = 1.862 4s_i^2 - 3.95s_i^3 + 16.37s_i^4 - 37.226s_i^5 + \\ 76.81s_i^6 - 126.9s_i^7 + 172s_i^8 - 143.97s_i^9 + \\ 66.56s_i^{10} \quad (14)$$

式中:  $s_i$  为相对裂纹深度,  $s_i = h_i/h_0$ 。

由于式(13)中的无量纲柔度  $\theta_i$  为  $J(s_i)$  和固定端截面高度  $h_0$  的函数,因此必须给定梁的固定端截面高度  $h_0$  才能得到无量纲柔度  $\theta_i$ 。

联合边界条件、裂纹处连续性条件、质量块处连续性条件可以得到由  $4(n+1)$  个方程组成的齐次线性方程组:

$$\mathbf{K}(\lambda) \mathbf{N} = 0 \quad (15)$$

式中:

$$\mathbf{K}(\lambda) = \begin{bmatrix} K_{11}(\lambda) & \cdots & K_{1,4(n+1)}(\lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{4(n+1),1}(\lambda) & \cdots & K_{4(n+1),4(n+1)}(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = [N_{11}, N_{21}, N_{31}, N_{41} \cdots N_{1,n+1}, N_{2,n+1}, N_{3,n+1}, N_{4,n+1}]^T$$

因方程(15)存在非零解,故得到频率方程:

$$|\mathbf{K}(\lambda)| = 0 \quad (16)$$

由式(16)可解出无量纲固有频率  $\lambda$ 。

## 3 数值模拟

### 3.1 方法有效性验证

为了验证本文方法的有效性,以图 1 所示的旋转裂纹梁为研究对象,设置其弹性模量

$E=200\text{ GPa}$ , 密度  $\rho = 7\ 850\text{ kg/m}^3$ , 转轴半径  $r=0\text{ mm}$ , 梁长  $L=800\text{ mm}$ , 转速  $\Omega=300\text{ rad/s}$ , 固定端截面宽度  $b_0=30\text{ mm}$ , 高度  $h_0=10\text{ mm}$ , 相对裂纹深度  $s=0.5$ , 宽度渐变系数  $c_b=0$ , 高度渐变系数  $c_h=0\sim 0.8$ , 采用本文方法计算得到裂纹位于  $X_c=0.2, 0.4, 0.8$  三种工况下的前四阶固有频率, 并将结果与文献[9]进行比对。文献[9]仅给出了等截面梁的结果, 包含在本文的结果中。因之前在 Frobenius 方法的计算推导过程中对振动控制方程进行了无量纲化处理, 使得关于旋转梁的各参数(转速  $\Omega$ 、转轴半径等  $r$ )无量纲化, 而文献[9]中的各参数均是有量纲的, 故需先对文献[9]中的各参数(转速  $\Omega$ 、转轴半径  $r$ )进行无量纲化处理得到无量纲化的各参数(转速  $U$ 、转轴半径  $R$ ), 再运用本文方法计算得到无量纲化的固有频率  $\lambda$ , 然后将无量纲固有频率有量纲化。

裂纹位于  $X_c=0.2, 0.4, 0.8$  三种工况下的前四阶固有频率如表 1~表 3 所示, 可以看出: 采用本文方法计算得到的前四阶固有频率与文献[9]中的结果匹配良好; 随着高度渐变系数的增加, 一阶固有频率呈现递增趋势, 而其他三阶频率均呈现下降趋势。这是因为影响变截面梁基频的主要因素为其根部的质量比重, 而影响较高阶频率的主要因素为梁的平均柔度。

表 1 含裂纹旋转梁前四阶固有频率( $X_c=0.2, x=0.5$ )

Table 1 The first four-order natural frequencies of rotating cracked beams at( $X_c=0.2, x=0.5$ )

阶数	固有频率/Hz					
	$c_h=0$	$c_h=0^{[9]}$	$c_h=0.2$	$c_h=0.4$	$c_h=0.6$	$c_h=0.8$
1	51.89	51.90	52.22	52.67	53.31	53.72
2	145.04	145.09	140.21	134.94	129.09	124.69
3	298.72	298.31	279.44	259.02	237.00	206.04
4	516.22	513.78	475.28	431.89	384.83	317.15

表 2 含裂纹旋转梁前四阶固有频率( $X_c=0.4, x=0.5$ )

Table 2 The first four-order natural frequencies of rotating cracked beams at ( $X_c=0.4, x=0.5$ )

阶数	固有频率/Hz					
	$c_h=0$	$c_h=0^{[9]}$	$c_h=0.2$	$c_h=0.4$	$c_h=0.6$	$c_h=0.8$
1	51.91	51.94	52.25	52.71	53.37	54.46
2	144.49	144.31	139.75	134.58	128.81	122.34
3	298.20	297.59	278.59	257.94	235.78	211.16
4	521.25	520.84	480.02	435.90	387.65	332.63

表 3 含裂纹旋转梁前四阶固有频率( $X_c=0.8, x=0.5$ )

Table 3 The first four-order natural frequencies of rotating cracked beams at ( $X_c=0.8, x=0.5$ )

阶数	固有频率/Hz					
	$c_h=0$	$c_h=0^{[9]}$	$c_h=0.2$	$c_h=0.4$	$c_h=0.6$	$c_h=0.8$
1	51.91	51.94	52.25	52.71	53.37	54.46
2	144.68	144.56	139.85	134.61	128.80	122.35
3	295.58	293.72	276.21	255.89	234.22	210.30
4	508.01	506.33	470.49	427.88	382.10	330.02

### 3.2 裂纹位置和深度对梁振动频率的影响分析

为了进一步研究开口裂纹损伤对变截面旋转梁振动频率的影响, 设置无量纲转速  $U=3$ , 无量纲转轴半径  $R=1$ , 厚度  $h_0=0.02\text{ m}$ , 宽度渐变系数  $c_b=0.3$ , 高度渐变系数  $c_h=0.5$ , 裂纹相对位置  $X_c$  在固定端和自由端之间移动, 相对裂纹深度  $s=0, 0.1, 0.2, 0.4$ , 前三阶无量纲固有频率随裂纹位置和深度的变化情况如图 2~图 4 所示。

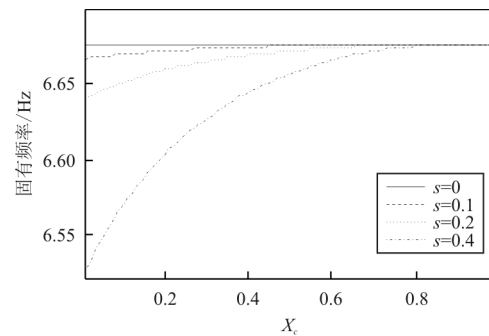


图 2 一阶固有频率变化

Fig. 2 Changes of the first-order natural frequency

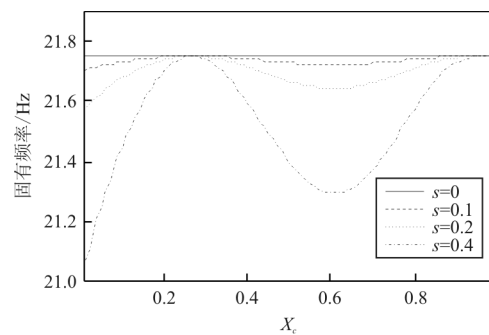


图 3 二阶固有频率变化

Fig. 3 Changes of the second-order natural frequency

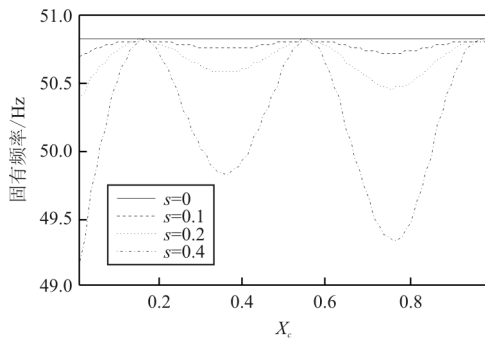


图 4 三阶固有频率变化

Fig. 4 Changes of the third-order natural frequency

从图 2~图 4 可以看出:随着裂纹深度的增加,梁的前三阶固有频率均有逐渐减小的趋势,当裂纹位于固定端附近时,对固有频率的影响最大,对于第一阶固有频率,当裂纹向自由端移动时,裂纹损伤对其影响逐渐减弱,当裂纹移动至接近  $X_c=0.8$  时,梁的固有频率几乎不再变化;对于第二阶固有频率,当裂纹位于  $X_c=0.25, 0.95$  附近时,无论裂纹深度如何变化,均不会对其造成影响,即为无效损伤位置;对于第三阶频率,当裂纹位于  $X_c=0.15, 0.55, 0.95$  附近时,为无效损伤位置。

### 3.3 损伤程度和转速对梁振动频率的联合影响分析

下面讨论损伤程度和转速同时变化时前两阶固有频率的变化情况。以钢制矩形变截面单裂纹悬臂梁为算例,设定弹性模量  $E=200$  GPa,密度  $\rho=7850$  kg/m<sup>3</sup>,梁长  $L=1$  m,固定端截面宽度  $b_0=0.1$  m,高度  $h_0=0.1$  m,转轴半径  $r=0.5$  m,宽度渐变系数  $c_b=0.1$ ,高度渐变系数  $c_h=0.3$ ,梁的转速  $n$  在  $0\sim 10\,000$  rpm 之间渐变,相对裂纹深度  $s$  在  $0\sim 0.5$  之间渐变。由前述分析可知,当裂纹位于固定端附近时,前两阶固有频率均出现最大衰减,为了体现裂纹损伤的影响,在数值计算中,设置裂纹相对位置为  $X_c=0.05$ 。计算得到转速和相对裂纹深度连续变化时梁的前两阶固有频率,结果分别如图 5~图 6 所示,可以看出:随着裂纹加深,前两阶固有频率均出现相应的衰减,但是随着转速增加,裂纹损伤所导致的频率衰减程度有逐渐减小的趋势;转速的增加使得梁的前两阶固有频率增

大,并且随着裂纹加深,这种由转速提升引起的固有频率提升有逐渐增大的趋势。由此可见,损伤程度和转速对梁的前两阶固有频率具有明显的叠加作用效果。

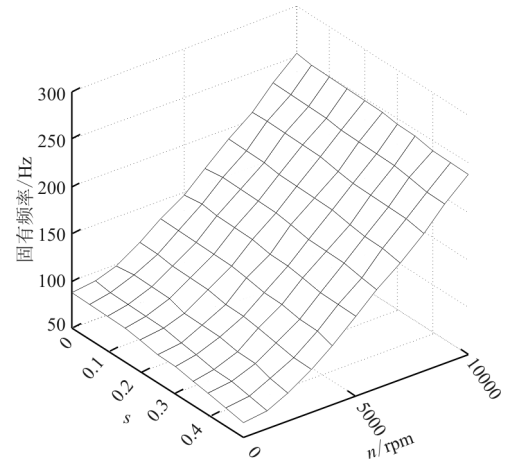


图 5 一阶固有频率变化

Fig. 5 Changes of the first-order natural frequency

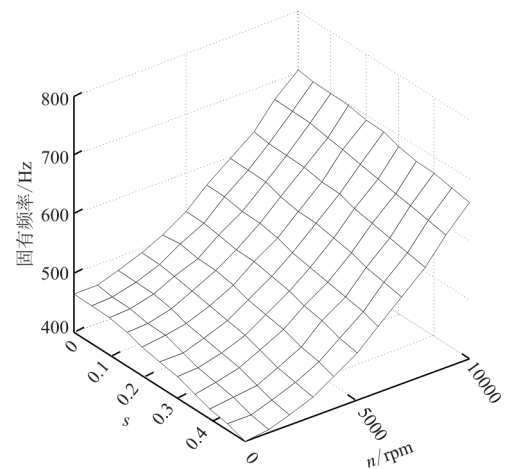


图 6 二阶固有频率变化

Fig. 6 Changes of the second-order natural frequency

为了进一步量化这种叠加作用效果,设不同裂纹深度所对应的前两阶固有频率分别为  $f_{1s}$  和  $f_{2s}$ ,不同旋转速度所对应的前两阶固有频率分别为  $f_{1n}$  和  $f_{2n}$ ,计算不同裂纹深度下转速变化引起的前两阶固有频率比  $f_{1n}/f_{1s}$  和  $f_{2n}/f_{2s}$  以及不同转速下裂纹深度变化引起的前两阶固有频率比  $f_{1s}/f_{1n}$  和  $f_{2s}/f_{2n}$ ,结果如表 4~表 5 所示。



表 4 转速变化引起的一阶和二阶固有频率比值

Table 4 Ratios of first-order and second-order natural frequency changed with rotating speed

相对裂纹深度	一阶固有频率比 $f_{1n}/f_1(\%)$						二阶固有频率比 $f_{2n}/f_2(\%)$					
	初始频率/Hz	转速/rpm					初始频率/Hz	转速/rpm				
		2 000	4 000	6 000	8 000	10 000		2 000	4 000	6 000	8 000	10 000
0	87.70	113.99	147.93	190.96	237.78	286.31	465.61	102.54	109.80	120.93	134.95	151.02
0.1	86.61	114.25	148.72	192.34	239.77	288.92	461.19	102.58	109.97	121.27	135.49	151.79
0.2	83.73	114.98	150.96	196.26	245.41	296.31	450.40	102.70	110.41	122.17	136.92	153.78
0.3	79.26	116.30	155.00	203.28	255.47	309.46	435.61	102.89	111.10	123.57	139.13	156.84
0.4	73.17	118.56	161.75	214.89	272.00	330.93	418.74	103.14	112.01	125.41	142.01	160.80
0.5	65.36	122.48	173.10	234.07	299.00	365.71	401.40	103.44	113.12	127.59	145.40	165.42

表 5 裂纹深度变化引起的一阶和二阶固有频率比值

Table 5 Ratios of first-order and second-order natural frequency changed with crack depth

转速/rpm	一阶固有频率比 $f_{1s}/f_1(\%)$						二阶固有频率比 $f_{2s}/f_2(\%)$					
	初始频率/Hz	相对裂纹深度					初始频率/Hz	相对裂纹深度				
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	87.70	98.75	95.47	90.38	83.43	74.52	465.61	99.05	96.73	93.56	89.93	86.21
2 000	99.97	98.97	96.30	92.21	86.78	80.08	477.43	99.09	96.89	93.88	90.46	86.97
4 000	129.74	99.28	97.43	94.69	91.23	87.20	511.24	99.20	97.27	94.66	91.75	88.81
6 000	167.48	99.46	98.12	96.20	93.89	91.35	563.06	99.33	97.72	95.60	93.26	90.96
8 000	208.54	99.58	98.53	97.10	95.44	93.71	628.34	99.45	98.15	96.45	94.64	92.89
10 000	251.10	99.65	98.81	97.68	96.44	95.19	703.18	99.55	98.50	97.16	95.75	94.43

从表 4 可以看出:随着转速的逐渐提升,一阶固有频率比值逐渐增大;但是当梁发生裂纹损伤后,这种由旋转效应引起的固有频率提升随相对裂纹深度的增加而变得更加显著。当相对裂纹深度  $s=0$  时,  $f_{1n}/f_1$  由转速  $n=2\ 000$  rpm 时的 113.99% 提升为转速  $n=10\ 000$  rpm 时的 286.31%,当相对裂纹深度  $s=0.5$  时,  $f_{1n}/f_1$  由转速  $n=2\ 000$  rpm 时的 122.48% 提升为转速  $n=10\ 000$  rpm 时的 365.71%。

从表 5 可以看出:随着相对裂纹深度逐渐加深,一阶频率衰减量逐渐增大;但是当梁旋转后,这种由裂纹损伤引起的频率衰减幅度随转速的提升有逐渐减小的趋势。当转速  $n=0$  时,  $f_{1s}/f_1$  由裂纹深度  $s=0.1$  时的 98.75% 下降至裂纹深度  $s=0.5$  时的 74.52%,当转速  $n=10\ 000$  rpm 时,  $f_{1s}/f_1$  由裂纹深度  $s=0.1$  时的 99.65% 下降至裂纹深度  $s=0.5$  时的 95.19%。

通过观察表 4 和表 5 的二阶固有频率比值发现转速和损伤程度与前两阶固有频率比值均有同样的耦合作用效应。但相比之下,这种耦合作用效应对一阶固有频率比值的影响更为显著。

上述分析所得出的结论和文献[9]中的结论一致,从而进一步验证了文献[9]中的结论,并将该结论的适用范围从均匀梁拓展到了变截面梁。

### 4 结 论

(1) 对于变截面梁,随着高度渐变系数的增加,一阶固有频率呈现递增趋势,而其他三阶频率均呈现下降趋势。

(2) 当裂纹位于梁的固定端附近时,对固有频率的影响最大,前三阶固有频率分别包含一、二、三个无效损伤位置。

(3) 转速和损伤程度对前两阶固有频率比值均有耦合作用效应,相比之下这种耦合作用效应对

一阶固有频率影响更为明显。该结论不仅适用于均匀梁,对变截面梁也同样适用。

### 参考文献

- [1] Carden E P. Vibration based condition monitoring: A review[J]. *Structural Health Monitoring*, 2004, 3(4): 355-377.
- [2] Fan W, Qiao P. Vibration-based damage identification methods: A review and comparative study[J]. *Structural Health Monitoring*, 2011, 9(3): 83-111.
- [3] 李录平, 李芒芒, 晋风华, 等. 振动检测技术在风力机叶片裂纹故障监测中的应用[J]. *热能动力工程*, 2013, 28(2): 207-212.  
Li Luping, Li Mangmang, Jin Fenghua, et al. Applications of the vibration detection technologies in monitoring the blade crack fault of wind turbines[J]. *Journal of Engineering for Thermal Energy and Power*, 2013, 28(2): 207-212. (in Chinese)
- [4] Khiem N T, Tran T H. A procedure for multiple crack identification in beam like structure from natural vibration mode[J]. *Journal of Vibration & Control*, 2013, 20(9): 1417-1427.
- [5] Liu C, Jiang D. Crack modeling of rotating blades with cracked hexahedral finite element method[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2014, 46(2): 406-423.
- [6] 乔社宁, 李兵. 离心式风机含裂纹叶片的试验模态分析[J]. *流体机械*, 2016, 44(11): 11-14.  
Qiao Shening, Li Bing. Experimental modal analysis on blade crack detection of the centrifugal fan[J]. *Fluid Machinery*, 2016, 44(11): 11-14. (in Chinese)
- [7] 范博楠, 张玉波, 王海斗, 等. 裂纹参数变化对叶片低阶弯曲振动特性的影响[J]. *表面技术*, 2015(9): 96-101.  
Fan Bonan, Zhang Yubo, Wang Haidou, et al. Effect of variation in crack parameters on the characteristics of blades low-order flexural vibration[J]. *Surface Technology*, 2015(9): 96-101. (in Chinese)
- [8] 蒋宪宏, 邓子辰, 李庆军, 等. 带裂纹旋转柔性梁系统的刚柔耦合动力学研究[J]. *计算力学学报*, 2016, 33(4): 564-569.  
Jiang Xianhong, Deng Zichen, Li Qingjun, et al. Rigid-flexible coupling dynamic analysis of a rotating flexible beam with cracks[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, 33(4): 564-569. (in Chinese)
- [9] Lee J W, Lee J Y. In-plane bending vibration analysis of a rotating beam with multiple edge cracks by using the transfer matrix method[J]. *Meccanica*, 2016, 52(4/5): 1143-1157.
- [10] Ostachowicz W M, Krawczuk M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 150(2): 191-201.
- [11] 韩伟, 毛崎波. 用动态刚度法分析旋转变截面梁横向振动特性[J]. *噪声与振动控制*, 2018, 38(2): 18-21.  
Han Wei, Mao Qibo. Analysis of free vibration of rotating tapered beams using dynamic stiffness method[J]. *Noise and Vibration Control*, 2018, 38(2): 18-21. (in Chinese)
- [12] Naguleswaran S. Transverse vibration of a uniform euler-bernuulli beam under linearly varying axial force[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 275(1/2): 47-57.
- [13] Pandey A K, Biswas M, Samman M M. Damage detection from changes in curvature mode shapes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 145(2): 47-57.

### 作者简介:

韩伟(1992—),男,硕士研究生。主要研究方向:基于振动的结构损伤检测。

毛崎波(1975—),男,博士,教授。主要研究方向:噪声与振动主动控制、压电智能材料的结构损伤检测中应用。

田文昊(1992—),男,硕士研究生。主要研究方向:飞机复合材料结构振动与声控制。

(编辑:丛艳娟)