

文章编号:1674-8190(2020)03-370-10

# 基于双曲正弦函数的拓扑优化在热传导结构设计中的应用

薛红军,陶才勇,党思娜

(西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

**摘要:** 电子设备的热传导结构设计是解决飞机电子设备热防护问题的有效方法,基于经验的传统设计方法存在设计周期长,获得的结果性能并不一定优等问题,因此将拓扑优化应用在飞机电子设备散热设计中,能够快速获取较优的结构布局。建立基于双曲正弦函数(sinh 函数)插值模型的热传导拓扑优化数学模型,将该模型的算法应用于二维、三维热传导算例,并通过 MATLAB 编程进行算法实现;该模型与 SIMP 模型和 RAMP 模型进行对比,并应用于机载 LRM 模块导热拓扑优化设计。结果表明:基于 sinh 函数的插值模型较 SIMP 插值模型精确,较 RAMP 插值模型的迭代次数少,能更好地解决热传导结构拓扑优化设计问题。

**关键词:** 拓扑优化; sinh 函数; 传热模型; 热传导结构; 飞机电子设备

中图分类号: V231.1<sup>+</sup>3; TH11

文献标识码: A

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.2020.03.011

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Application of Topology Optimization Based on sinh Function in the Design of Heat Conduction Structure

XUE Hongjun, TAO Caiyong, DANG Sina

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The heat conduction structure design of electronic equipment is an effective method to solve the thermal protection problem of aircraft electronic equipment. The experiential-based traditional design method has the problems of long design period, and can't acquire the better results, so the topology optimization applied in thermal design of aircraft electronic device can acquire the fast better structure layout. The heat conduction topology optimization mathematic method based on hyperbolic sine function (sinh function) interpolation model is established. Its algorithm is applied to 2D and 3D heat conduction samples, and realized with MATLAB programming. The model is compared with SIMP model and RAMP model, and applied in conduction topology optimization design of onboard LRM module. The results show that the interpolation model based on sinh function is more accurate than SIMP interpolation model, and has fewer iterations than RAMP interpolation model, and can better solve the problem of topology optimization design of heat conduction structure.

**Key words:** topology optimization; sinh function; heat transfer model; heat conduction structure; avionics

收稿日期:2019-09-04; 修回日期:2020-01-03

基金项目:国家自然科学基金(51975477,51705332)

通信作者:薛红军 xuehj@nwpu.edu.cn

引用格式:薛红军,陶才勇,党思娜. 基于双曲正弦函数的拓扑优化在热传导结构设计中的应用[J]. 航空工程进展, 2020, 11(3): 370-379.

XUE Hongjun, TAO Caiyong, DANG Sina. Application of topology optimization based on sinh function in the design of heat conduction structure[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2020, 11(3): 370-379. (in Chinese)

## 0 引言

飞机电子设备不断增多,其散热结构是航空工程结构设计过程中必须考虑的重要问题之一<sup>[1]</sup>,飞机中的传热结构设计既要满足一定的强度和刚度要求以达到特定的功能,又要满足散热要求,目的是保证关键设备不会因为温度过高而出现故障。通过热力学计算设计的传统散热装置,已无法满足对热防护结构具有高性能要求的实际工程需求<sup>[2]</sup>,因此,寻求一种新的散热装置设计方法成为解决热传导问题的关键。

针对热传导问题,H. Rodrigues 等<sup>[3-4]</sup>和 C. Jog<sup>[5]</sup>将拓扑优化应用在热弹性结构中,初次实现了拓扑优化在热传导中的应用;A. Bejan<sup>[6]</sup>在热传导的背景下介绍了热传导通道构造理论,建立了所谓的“体一点(VP)问题”或“通道问题”,并讨论了在发热域(例如 CPU)中布置固定数量的材料的需要;Li Q 等<sup>[7]</sup>明确地将 ESO 用于热传导问题。

现阶段应用于热传导结构的拓扑优化方法主要有:渐进结构优化方法(ESO)、双向渐进结构优化方法(BESO)<sup>[8]</sup>、变密度方法<sup>[9]</sup>、水平集方法<sup>[10]</sup>、拓扑导数方法<sup>[11]</sup>。就目前的研究成果而言,应用比较广泛的拓扑优化方法是变密度法。

基于变密度方法的散热结构的拓扑优化设计主要使用:带惩罚的各向同性固体材料模型<sup>[12]</sup>(Solid Isotropic Material with Penalization,简称 SIMP)和材料属性的理性近似模型<sup>[13]</sup>(Rational Approximation of Material Properties,简称 RAMP)。F. H. Burger 等<sup>[14]</sup>利用 SIMP 和移动渐近线(MMA)的方法,探讨了体一点问题的 3D 解决方案;T. Van Oevelen 等<sup>[15]</sup>采用 SIMP 模型演示了用双层简化模型表示全三维解的共轭传热问题的解;G. Marck 等<sup>[16]</sup>使用 SIMP 方法进行了多目标优化;Li Jiachun 等<sup>[17]</sup>使用了材料特性的理性近似模型(RAMP),进行了热传导结构优化设计的探索。两种模型对于导热结构的拓扑优化设计都能得到比较好的布局,但是对于“体一点”问题<sup>[18]</sup>,SIMP 方法会产生很多树状末梢结构,这样的结果有一定的缺点,如可制造性差,并且结果并不是最靠近最优值的结果<sup>[19]</sup>。因此有学者通过 RAMP

方法得到了一定的改进,能过获取相对更加良好的拓扑结果<sup>[20]</sup>。但是,这两种方法有其局限性,在解决二维、三维均匀热源的散热问题时,SIMP 方法不够精确,RAMP 方法迭代步长过多。

本文在变密度法的基础上,建立基于 sinh 函数的插值模型,与 SIMP 和 RAMP 模型的计算结果进行对比,并将此模型应用于机载 LRM 模块导热拓扑优化设计中进行验证。

## 1 基于 sinh 函数插值模型的拓扑优化在热传导结构设计中的模型建立

基于变密度法的拓扑优化的关键是选择合适的插值函数和惩罚技术,将问题的物理量表示为连续设计变量的函数。本文采用基于 sinh 函数的插值模型<sup>[19]</sup>进行求解计算。

### 1.1 基于 sinh 函数的插值模型

基于 sinh 函数的插值模型,其实质是在插值模型中应用了双曲正弦函数(sinh 函数):

$$k_i(\rho_i) = k_{\min} + \frac{\sinh(p\rho_i)}{\sinh(p)}(k_0 - k_{\min}) \quad (1)$$

可以简化为

$$k_i(\rho_i) = \frac{\sinh(p\rho_i)}{\sinh(p)}k_0 \quad (2)$$

sinh 函数插值模型采用双曲正弦函数来对中间密度进行惩罚,其函数关系如图 1 所示。

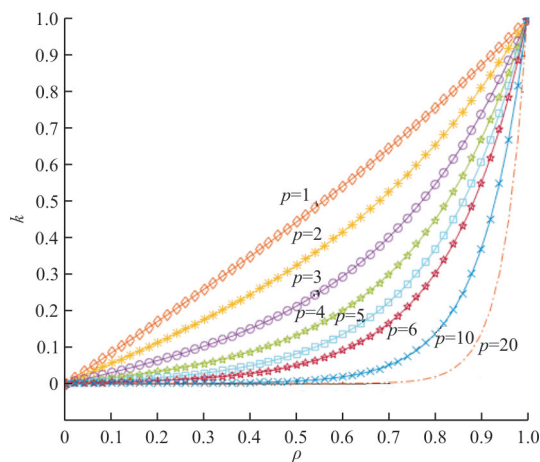


图 1 sinh 插值模型

Fig. 1 The interpolation model of sinh

sinh 函数插值模型的微分形式为

$$k'_i(\rho_i) = p \frac{\cosh(p\rho_i)}{\sinh(p)} (k_0 - k_{\min}) \quad (3)$$

当  $\rho=0$  时,

$$k'_i(0) = \frac{p}{\sinh(p)} (k_0 - k_{\min})$$

当  $\rho=1$  时,

$$k'_i(0) = \frac{p \cosh(p)}{\sinh(p)} (k_0 - k_{\min})$$

当惩罚因子  $p > 0$  时,  $k'_i(0) > 0$ 。

## 1.2 sinh 插值模型灵敏度分析

计算导数最好的办法是使用伴随方法,在此也采用伴随方法推导 sinh 函数插值模型的目标函数的灵敏度。

本文以热柔度为目标函数,基于 sinh 函数插值模型的目标函数为

$$C = \mathbf{T}^T \mathbf{K}(\rho) \mathbf{T} = \sum_{e=1}^n \mathbf{T}_e^T \frac{\sinh(p\rho_i)}{\sinh(p)} \mathbf{K}_0 \mathbf{T}_e \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{K}_0$  为单元导热系数矩阵。

对于上面给出的热柔度目标函数,通过添加零函数,将其重写为

$$C = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{T} - \mathbf{Q}) \quad (5)$$

式中:  $\boldsymbol{\lambda}$  为拉格朗日乘数,是一个任意的、但是固定的实数向量。

然后将其对设计变量求导得到:

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = (\mathbf{Q}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \rho_i} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{T} \quad (6)$$

当  $\boldsymbol{\lambda}$  满足伴随方程

$$\mathbf{Q}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_0 = \frac{1}{12} k_0 \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

当惩罚因子  $p=3$  时,灵敏度随着设计变量的变化曲线如图 2 所示,可以看出:所有的灵敏度值

目标函数灵敏度可写为

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = -\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{T} \quad (8)$$

根据伴随方程,可以直接得到  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{T}$ ,因此目标函数灵敏度为

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = -\mathbf{T}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{T} \quad (9)$$

其中,对于传热系数矩阵对设计变量的导数为

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} = p \frac{\cosh(p\rho_i)}{\sinh(p)} \mathbf{K}_0 \quad (10)$$

因此,当传热系数矩阵采用 sinh 函数插值模型对其进行插值,则目标函数的灵敏度为

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \rho_i} &= -\sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^T \left[ p \frac{\cosh(p\rho_i)}{\sinh(p)} \mathbf{K}_0 \right] \mathbf{T}_i = \\ &= -p \sum_{i=1}^n \frac{\cosh(p\rho_i)}{\sinh(p)} \mathbf{T}_i^T \mathbf{K}_0 \mathbf{T}_i \end{aligned} \quad (11)$$

式中:  $\mathbf{K}_0$  为具有单元热传导矩阵,当材料的导热系数为  $k_0$  时,对于二维的四节点矩形单元,单元的尺寸为单位长度,  $\mathbf{K}_0$  可写为

$$\mathbf{K}_0 = k_0 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

对于三维八节点正六面体单元,单元的尺寸为单位长度,单元导热系数矩阵  $\mathbf{K}_0$  可写为

都是负值,也就意味着随着导热材料的增加,目标函数在不断地减小,导热性能更好。

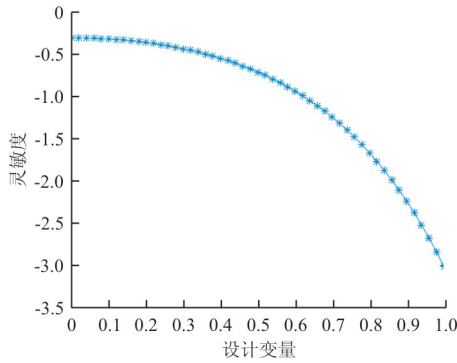


图 2 灵敏度变化曲线  
Fig. 2 Sensitivity curve

为了避免棋盘格现象和网格依赖现象,在计算中采用灵敏度过滤技术,将灵敏度改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial x_e} = \frac{1}{\max(\gamma, x_e) \sum_{i \in N_e} H_{ei}} \sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i \frac{\partial c}{\partial x_e} \\ H_{ei} = \max[0, r_{\min} - \Delta(e, i)] \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $H_{ei}$  为单元  $i$  的一个集合;  $\gamma$  为一个比较小的常数,为避免分母为 0,可取  $\gamma = 10^{-3}$ ;单元  $i$  中心到单元  $e$  的距离  $\Delta(e, i)$  小于最小滤波半径  $r_{\min}$ 。

### 1.3 基于 sinh 函数插值模型的优化准则

本文以结构的散热弱度最小为目标函数,体积分数、结构平衡方程和设计变量约束为约束条件,建立基于 sinh 函数插值模型的热传导结构的拓扑优化数学模型为

min:

$$C = \sum_{e=1}^n \mathbf{T}_e^T \mathbf{K}_e(X) \mathbf{T}_e = \sum_{e=1}^n \mathbf{T}_e^T \frac{\sinh(p\rho_i)}{\sinh(p)} \mathbf{K}_0 \mathbf{T}_e \quad (15)$$

$$\text{subject to: } \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{F} \\ \sum_{e=1}^n V_e x_e / V_0 \leq f \\ 0 < x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max} \end{cases}$$

式中:  $C$  为散热弱度;  $\mathbf{K}$  为结构的总体传热系数矩阵;  $\mathbf{F}$  为温度载荷向量;  $\mathbf{T}$  为节点温度向量;  $V_e$  为单元体积;  $V_0$  为结构初始状态下总的体积;  $f$  为体积分数,是优化后的结构总体积与初始状态下总体积之比;  $x_{\min}$  为设计变量取值的下限,通常取一个较小的数,如 0.001;  $x_{\max}$  为设计变量取值的上限,取为  $x_{\max} = 1$ 。

利用拉格朗日乘数法将多为高次多约束问题转换为无约束最优化问题,对应于拓扑优化问题的拉格朗日函数为

$$L = C + \lambda_1(V - fV_0) + \lambda_2^T[\mathbf{K}(X)\mathbf{T} - \mathbf{F}] +$$

$$\lambda_3(\mathbf{x}_{\min} - \mathbf{x} + \mathbf{b}_i^2) + \lambda_4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\max} + \mathbf{c}_i^2) \quad (16)$$

式中:  $\lambda_1$  为拉格朗日乘子;  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  为拉格朗日乘子向量;  $\mathbf{b}_i$  和  $\mathbf{c}_i$  为松弛因子;  $\mathbf{x}$  为  $x_i$  组成的列向量。

当  $x_i$  取极值  $x_i^*$  时拉格朗日函数满足库恩-塔克(K-T)必要条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial C}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} + \lambda_2^T \frac{\partial \mathbf{K}(X)\mathbf{T}}{\partial x_i} - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ V = fV_0 \\ \mathbf{F} = \mathbf{K}(X)\mathbf{T} \\ \lambda_3^i(x_{i\min} - x_i) = 0 \\ \lambda_4^i(x_i - x_{i\max}) = 0 \\ (x_{i\min} \leq x_i \leq x_{i\max}, \lambda_3^i, \lambda_4^i > 0) \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $\lambda_3$  为由  $\lambda_3^i$  组成的列向量;  $\lambda_4$  为由  $\lambda_4^i$  组成的列向量。

当  $x_{i\min} \leq x_i \leq x_{i\max}$  时,设计变量的上下限约束不起作用,有  $\lambda_3^i = \lambda_4^i = 0$ ; 当  $x_i = x_{i\min}$  时,设计变量的下限约束起作用,有  $\lambda_3^i \geq 0, \lambda_4^i = 0$ ; 当  $x_i = x_{i\max}$  时,设计变量上限约束起作用,有  $\lambda_3^i = 0, \lambda_4^i \geq 0$ 。由于  $\frac{\partial(\mathbf{K}(X)\mathbf{T} - \mathbf{F})}{\partial x_i} = 0$ ,热载荷与设计变量无关,故

$\frac{\partial \mathbf{K}(X)\mathbf{T}}{\partial x_i} = 0$ ,则上述的库恩-塔克条件等价于:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} + \lambda_2^T \frac{\partial \mathbf{K}(X)\mathbf{T}}{\partial x_i} = 0 & (x_{i\min} \leq x_i \leq x_{i\max}) \\ \frac{\partial C}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} + \lambda_2^T \frac{\partial \mathbf{K}(X)\mathbf{T}}{\partial x_i} \geq 0 & (x_i = x_{i\min}) \\ \frac{\partial C}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} + \lambda_2^T \frac{\partial \mathbf{K}(X)\mathbf{T}}{\partial x_i} \leq 0 & (x_i = x_{i\max}) \\ V = fV_0 \\ \mathbf{F} = \mathbf{K}(X)\mathbf{T} \\ \lambda_3^i, \lambda_4^i > 0 \end{cases} \quad (18)$$

考虑上式等于 0 的情况,并且代入  $C = \mathbf{T}^T \mathbf{K}(X)\mathbf{T}$  有:

$$\frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial x_i} \mathbf{K}(X) \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \frac{\partial \mathbf{K}(X)}{\partial x_i} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{K}(X) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} + \lambda_2^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}(X)}{\partial x_i} \mathbf{T} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i} \mathbf{K}(X) \right] = 0 \quad (19)$$

利用导热系数矩阵的对称性得出：

$$\frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial x_i} [2\mathbf{K}(X) \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{K}(X)] + \lambda_2^T \frac{\partial \mathbf{K}(X)}{\partial x_i} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \frac{\partial \mathbf{K}(X)}{\partial x_i} \mathbf{T} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (20)$$

式中： $\lambda_2$  为列矢量，其取值无限制。取  $\lambda_2 = -2\mathbf{T}$  代入式(20)得出：

$$-p \frac{\cosh(p\rho_i)}{\sinh(p)} \mathbf{T}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{T} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (21)$$

进而得出：

$$B_k^i = \frac{p \frac{\cosh(p\rho_i)}{\sinh(p)} \mathbf{T}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{T}}{\lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i}} = 1 \quad (22)$$

因此可以得到基于优化准则法的迭代公式为

$$x_{k+1}^i = \begin{cases} (B_k^i)^\eta x_k^i & [x_{i\min} \leq (B_k^i)^\eta x_k^i \leq x_{i\max}] \\ \max(x_{i\min}, x_e - m) & [x_e B_e^\eta \leq \max(x_{i\min}, x_e)] \\ \min(x_{i\max}, x_e + m) & [\min(x_{i\max}, x_e + m) \leq x_e B_e^\eta] \end{cases} \quad (23)$$

式中： $m$  为移动极限，通常取一个较小的正数； $\eta$  为阻尼系数，引入  $\eta$  的目的是为了保证数值计算的稳定性和收敛性。

利用式(23)对设计变量进行更新，需要求解  $B_k^i$ ，而求解  $B_k^i$  需要先求解得到拉格朗日乘子  $\lambda_1$ ，拉格朗日乘子和设计变量的取值满足系统约束，即  $x_i, \lambda_1$  的取值应满足体积约束  $V = fV_0$ 。假设设计变量由第  $k$  步  $x_k^i$  更新到第  $k+1$  步  $x_{k+1}^i$  时，结构体积由  $V^k$  变化到  $V^{k+1}$ ，且有  $V^{k+1} = fV_0 = \tilde{V}_0$ 。  $V^{k+1}$  在  $V^k$  邻域内泰勒展开，并略去二阶及高阶项有：

$$V^{k+1} - V^k = \tilde{V}_0 - V^k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} (x_{k+1}^i - x_k^i) \quad (24)$$

记  $(B_k^i)^\eta x_k^i \leq x_{i\min}$  为集合  $A$ ， $(B_k^i)^\eta x_k^i \geq x_{i\max}$  为集合  $B$ ， $x_{i\min} \leq (B_k^i)^\eta x_k^i \leq x_{i\max}$  为集合  $C$ ，则有：

$$\tilde{V}_0 - V^k = \sum_A \frac{\partial V}{\partial x_i} (x_{i\min} - x_k^i) +$$

$$\sum_C \frac{\partial V}{\partial x_i} (x_{i\max} - x_k^i) + \sum_B \frac{\partial V}{\partial x_i} (B_k^i x_k^i - x_k^i) \quad (25)$$

将式(21)代入式(25)得到：

$$\tilde{V}_0 - V^k - \sum_A \frac{\partial V}{\partial x_i} (x_{i\min} - x_k^i) - \sum_C \frac{\partial V}{\partial x_i} (x_{i\max} - x_k^i) = \sum_B \frac{\mathbf{T}^T \frac{\partial \mathbf{K}(X)}{\partial x_i} \mathbf{T} - \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i}}{\lambda_1} x_k^i \quad (26)$$

通过求解上述方程可以求解出  $\lambda_1$ ，通常采用二分法进行求解。

设计变量通过优化准则更新，其收敛性的检查方法如式(27)所示：

$$| \max(x_{k+1} - x_k) | < \epsilon \quad (27)$$

式中： $x_{k+1}$  为更新的设计变量； $x_k$  为旧的设计变量； $\epsilon$  为可行性误差，即每个单元更新后的密度值与前一次的密度值之差的绝对值不超过规定的误差值。

## 2 模型算法实现以及算例分析

### 2.1 算法实现

本文在 MATLAB 上进行程序编译，实现模型功能，整体的实现步骤如图 3 所示。

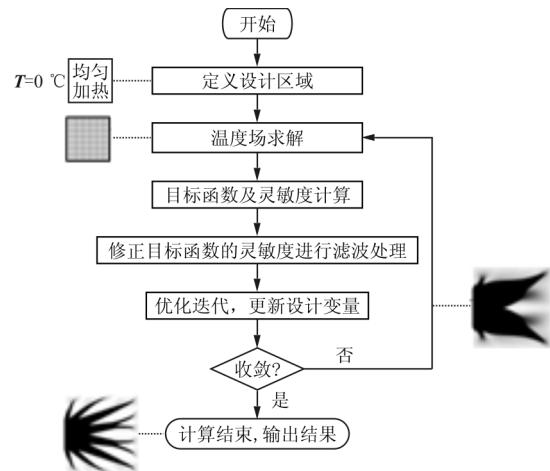


图 3 基于 sinh 的热传导结构拓扑优化方法算法流程  
Fig. 3 Algorithm flow of topology optimization method of heat conduction structure based on sinh

### 2.2 算例分析

#### 2.2.1 二维算例

(1) 体一点问题

算例 1: 整块板均匀加热，左边界中心处给定

温度  $T=0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 其余边界绝热, 其结构示意图如图 4 所示。

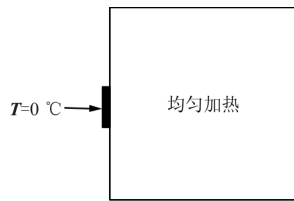


图 4 导热板均匀加热, 左侧中心处冷却模型示意图

Fig. 4 Model diagram of heat-conducting plate evenly heating and cooling at the left center

高热导率材料的导热系数为  $k_0 = 1\text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$  的假想材料, 低热导率材料的导热系数为  $k_{\min} = 0.001\text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$  的假想材料, 模型离散网格为  $180 \times 180$ 。优化参数设置为: 体积分数 0.4; 惩罚因子  $p=3$ ; 采用敏度滤波, 滤波半径  $r=2$ 。分别采用 SIMP 模型, RAMP 模型和基于 sinh 函数模型对其进行优化计算, 其优化结果如图 5 所示, 对比结果如表 1 所示。



(a) SIMP (b) RAMP (c) sinh 模型

图 5 导热板均匀加热, 左侧中心处冷却模型优化结果

Fig. 5 Optimization results of heat-conducting plate evenly heating and cooling at the left center

表 1 导热板均匀加热, 左侧中心处冷却模型优化数据对比

Table 1 Optimization data comparison of heat-conducting plate evenly heating and cooling at the left center

插值模型	目标函数值	迭代步数	计算时间/s
SIMP	166 919	319	39.16
RAMP	152 717	1 248	153.45
sinh 模型	151 178	755	92.75

(2) 均匀热源问题其他边界条件

**算例 2:** 整块板均匀加热, 左边界给定温度  $T=0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 其余边界绝热, 其结构示意图如图 6 所

示。高热导率材料的导热系数为  $k_0 = 1\text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$  的假想材料, 低热导率材料的导热系数为  $k_{\min} = 0.001\text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$  的假想材料, 优化参数设置为: 体积分数 0.5; 惩罚因子  $p=3$ ; 采用敏度滤波, 滤波半径  $r=3$ 。分别采用 SIMP 模型, RAMP 模型和基于 sinh 函数模型对其进行优化计算, 其优化结果如图 7 所示, 对比结果如表 2 所示。

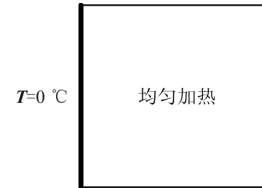
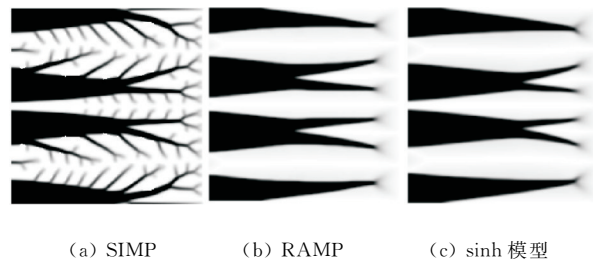


图 6 导热板均匀加热, 左侧边界冷却模型示意图

Fig. 6 Model diagram of heat-conducting plate evenly heating, and the left edge cooling



(a) SIMP (b) RAMP (c) sinh 模型

图 7 导热板均匀加热, 左侧边界冷却模型优化结果

Fig. 7 Optimization results of heat-conducting plate evenly heating, and the left edge cooling

表 2 导热板均匀加热, 左侧边界冷却模型优化数据对比

Table 2 Optimization data comparison of heat-conducting plate evenly heating, and the left edge cooling

插值模型	目标函数值	迭代步数	计算时间/s
SIMP	1 115.30	738	112.13
RAMP	976.14	349	53.28
sinh 模型	958.16	354	53.68

(3) 集中热源问题优化分析

**算例 3:** 平板中心加热, 四个角点给定温度  $T=0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 其结构示意图如图 8 所示, 其优化参数与算例 2 一致。分别采用 SIMP 模型, RAMP 模型和基于 sinh 函数模型进行优化计算, 优化结果如图 9 所示, 对比结果如表 3 所示。

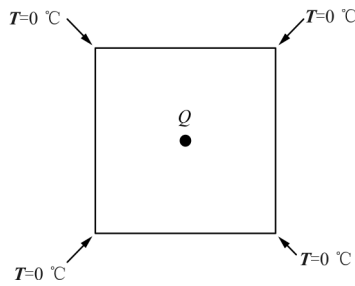


图 8 导热板的中心加热,四个顶点冷却模型示意图

Fig. 8 Model diagram of heat-conducting plate center heated and four apexes cooled

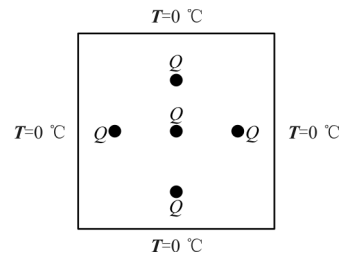


图 10 导热板上 5 个集中热源加热,四周边界散热模型示意图

Fig. 10 The model diagram of the heating of 5 centralized heat sources on the thermal plate and the heat dissipation at the surrounding boundary

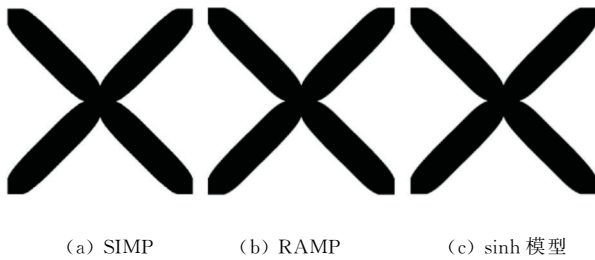


图 9 导热板的中心加热,四个顶点冷却模型优化结果

Fig. 9 Optimization Results of heat-conducting plate center heated and four apexes cooled

表 3 导热板的中心加热,四个顶点冷却模型优化结果数据对比

Table 3 Optimization data comparison of heat-conducting plate center heated and four apexes cooled

插值模型	目标函数值	迭代步数	计算时间/s
SIMP	336.02	270	457.73
RAMP	336.10	231	395.82
sinh 模型	336.08	162	279.01

**算例 4:**板上有 5 个集中热源,四周边界给定温度  $T=0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,其结构示意图 10 如图所示,其优化参数与算例 2 一致。高热导率材料的导热系数为  $k_0=1\text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$  的假想材料,低热导率材料的导热系数为  $k_{\min}=0.001\text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$  的假想材料。优化参数设置为:体积分数 0.5;惩罚因子  $p=3$ ;采用敏度滤波,滤波半径  $r=2.5$ 。分别采用 SIMP 模型,RAMP 模型和基于 sinh 函数模型进行优化计算,优化结果如图 11 所示,对比结果如表 4 所示。

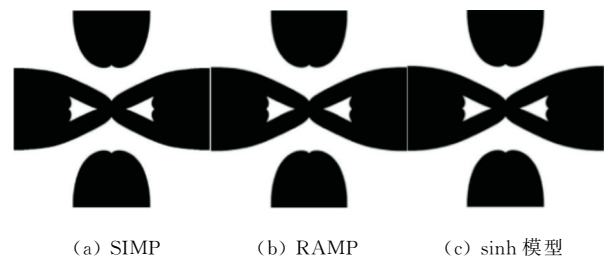


图 11 导热板上 5 个集中热源加热,四周边界散热模型优化结果

Fig. 11 Optimization results of the heating of 5 centralized heat sources on the thermal plate and the heat dissipation at the surrounding boundary

表 4 导热板上 5 个集中热源加热,四周边界散热模型优化结果数据对比

Table 4 Optimization data comparison of the heating of 5 centralized heat sources on the thermal plate and the heat dissipation at the surrounding boundary

插值模型	目标函数值	迭代步数	计算时间/s
SIMP	10.97	239	447.45
RAMP	10.97	231	435.38
sinh 模型	10.97	201	378.79

2.2.2 三维算例

(1) 均匀热源问题

**算例 5:**设计域下面均匀加热,上平面四个顶点温度固定  $T=0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,模型示意图如图 12 所示。高热导率材料的导热系数为  $k_0=1\text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$  的假想材料,低热导率材料的导热系数为  $k_{\min}=0.001\text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$  的假想材料。优化参数设置为:体积分数 0.3;惩罚因子  $p=3$ ;采用密度滤波,滤波半径  $r=1.4$ 。分别采用 SIMP 模型,RAMP 模型和基

于 sinh 函数模型进行优化计算,优化结果如图 13 所示,对比结果如表 5 所示。

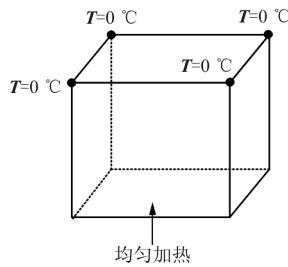


图 12 下表面均匀加热,上表面四个顶点冷却模型示意图

Fig. 12 A schematic model of uniform heating of the lower surface and cooling of the four vertices of the upper surface

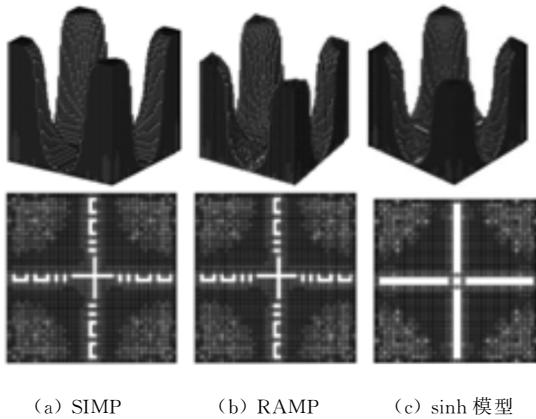


图 13 下表面均匀加热,上表面四个顶点冷却模型优化结果

Fig. 13 Optimization results of uniform heating of the lower surface and cooling of the four vertices of the upper surface

表 5 下表面均匀加热,上表面四个顶点冷却模型优化结果数据对比

Table 5 Optimization data comparison of uniform heating of the lower surface and cooling of the four vertices of the upper surface

插值模型	目标函数值	迭代步数	计算时间/s
SIMP	267.76	500	13 767.0
RAMP	267.39	345	9 409.0
sinh 模型	267.03	245	6 682.1

(2) 集中热源问题

算例 6: 正方体中心有集中热源,八个顶点温

度固定为  $T=0\text{ °C}$ ,模型示意图如图 14 所示。高热导率材料的导热系数为  $k_o=1\text{ W/m}\cdot\text{°C}$  的假想材料,低热导率材料的导热系数为  $k_{\min}=0.001\text{ W/m}\cdot\text{°C}$  的假想材料。优化参数设置为:体积分数 0.3;惩罚因子  $p=3$ ;采用密度滤波,滤波半径  $r=1.4$ 。分别采用 SIMP 模型,RAMP 模型和基于 sinh 函数模型进行优化计算,优化结果如图 15 所示,对比结果如表 6 所示。

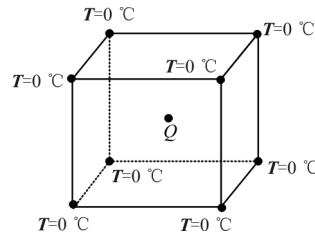


图 14 正方体中心加热,八个顶点冷却模型示意图

Fig. 14 Schematic diagram of cube center heating and eight vertices cooling

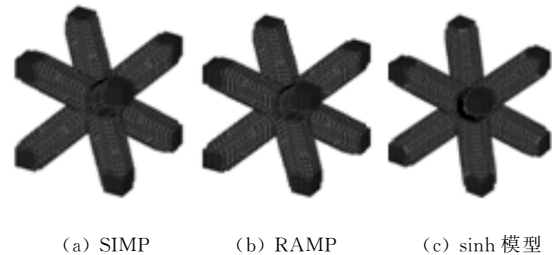


图 15 正方体中心加热,八个顶点冷却模型优化结果

Fig. 15 Optimization results of cube center heating and eight vertices cooling

表 6 正方体中心加热,八个顶点冷却模型优化结果数据对比

Table 6 Optimization data comparison of cube center heating and eight vertices cooling

插值模型	目标函数值	迭代步数	计算时间/s
SIMP	8 883.19	36	1 134.79
RAMP	8 877.76	59	1 826.01
sinh 函数	8 873.36	50	1 538.95

通过算例将 SIMP 模型和 RAMP 模型与基于 sinh 函数的插值模型进行对比,得出基于 sinh 函数的插值模型较 SIMP 插值模型精确,较 RAMP 插值模型的迭代步量少,计算效率高。



### 3 机载 LRM 模块导热拓扑优化设计

机载 LRM(现场可更换模块)模块已成为飞机电子系统设备的硬件标准,其优点是标准程度高、模块功能化强、维修性好、成本低。由于机载 LRM 模块是由超大规模集成电路构成的,包含大量的 VLSI 和 VHSIC 芯片,而这些设备在工作时会产生大量热量,使得 LRM 模块温度急剧上升,因此,机载 LRM 模块轻量化的冷却成为设计的首要问题。

由于 LRM 模块空间的限制,传导冷却方法被优先考虑。此方法是通过将热量从 LRM 模块芯片传至导热体,再经由导热体传至机架冷板,最后通过通风冷却或通液冷却等散热形式将热量带走。简化后的 LRM 模块导热模型如图 16 所示,导热体材料为铜,导热系数为  $377 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ 。

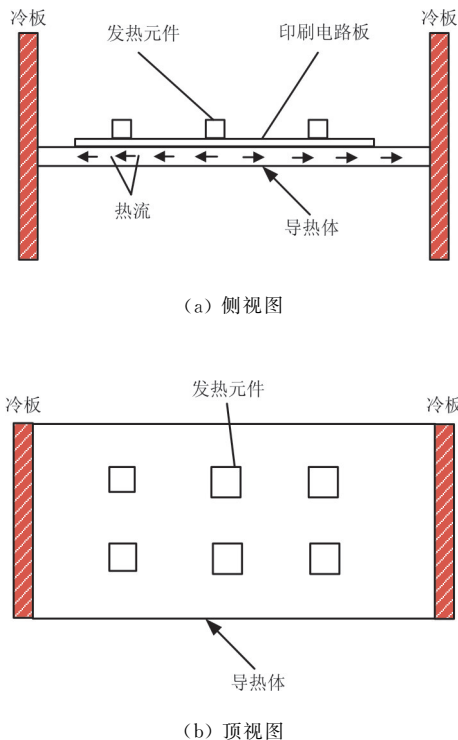


图 16 LRM 模块导热冷却示意图

Fig. 16 LRM module thermal conduction cooling diagram

通过拓扑优化进行导热路径优化设计,体积分数 0.5;惩罚因子  $p=3$ ;采用敏度滤波,滤波半径  $r=1.2$ ,分别采用 SIMP 模型、RAMP 模型和基于 sinh 函数的模型的优化结果如图 17 所示,对比结果如表 7 所示。

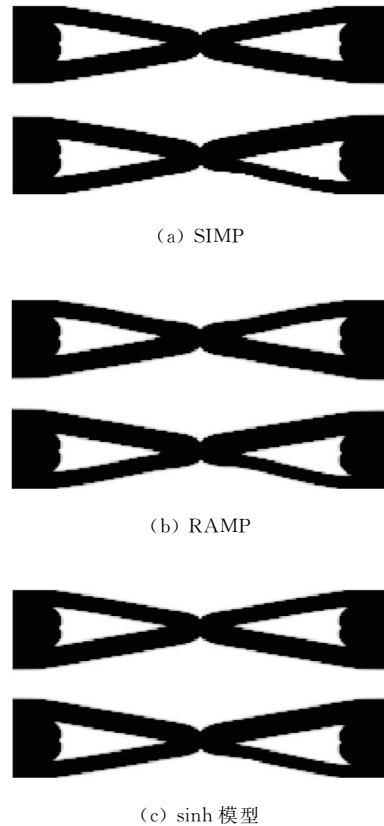


图 17 LRM 模块导热冷却优化结果

Fig. 17 Optimization results of LRM module thermal conduction cooling

表 7 LRM 模块导热优化数据对比

Table 7 LRM module thermal conductivity optimization data comparison

插值模型	目标函数值	迭代步数	计算时间/s
SIMP	12.88	339	29.52
RAMP	12.89	491	42.94
sinh 模型	12.87	274	23.70

通过对 LRM 模块的导热体进行拓扑优化设计,得出本文提出的基于 sinh 函数的插值模型较 SIMP 模型和 RAMP 模型能够更加高效快捷地获取良好的导热路径。

## 4 结 论

(1) 通过二维、三维均匀热源和集中热源问题的算例分析,与 SIMP 模型和 RAMP 模型进行对比,得出基于 sinh 函数插值模型较 SIMP 插值模型精确,较 RAMP 插值模型的步量少。

(2) 本文采用基于  $\sinh$  函数插值模型能够更加精确快捷地解决散热问题,同时为传热问题提供一种新思路。

### 参考文献

- [1] 飞机设计手册总编委会. 飞机设计手册: 第15册——生命保障和环控系统[M]. 北京: 航空工业出版社, 1999: 95.  
Editor-in-Chief of the Aircraft Design Handbook. Aircraft design handbook: vol. 15—design of life support and environmental control system[M]. Beijing: Aviation Industry Press, 1999: 95. (in Chinese)
- [2] 陈拥平, 高亮, 肖蜜. 基于变密度法的散热结构拓扑优化设计[J]. 计算机集成制造系统, 2018, 24(1): 117-126.  
CHEN Yongping, GAO Liang, XIAO Mi. Topology optimization design of heat dissipation structures based on variable density method[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2018, 24(1): 117-126. (in Chinese)
- [3] RODRIGUES H, FERNANDES P. Topology optimal design of thermoelastic structures using a homogenization method[J]. Control and Cybernetics, 1994, 23(3): 1-6.
- [4] RODRIGUES H, FERNANDES P. A material based model for topology optimization of thermoelastic structures[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38(12): 1951-1965.
- [5] JOG C. Distributed parameter optimization and topology design for non-linear thermoelasticity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 132(1): 117-134.
- [6] BEJAN A. Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1997, 40(4): 799-816.
- [7] LI Q, STEVEN G P, QUERIN O M, et al. Shape and topology design for heat conduction by evolutionary structural optimization[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1999, 42(17): 3361-3371.
- [8] HE D, LIU S. BESO method for topology optimization of structures with high efficiency of heat dissipation[J]. International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization, 2008, 2(1): 43-48.
- [9] BENDSØE M P, SIGMUND O. Topology optimization: theory, method and applications[M]. Berlin: Springer, 2003.
- [10] HA S H, CHO S. Topological shape optimization of heat conduction problems using level set approach[J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2005, 48(1): 22.
- [11] SOHEL MURSHED S M, LOPES M M. Heat exchangers: design, experiment and simulation[M]. [S. l.]: IntechOpen, 2017.
- [12] ROZVANY G I N, ZHOU M, BIRKER T. Generalized shape optimization without homogenization[J]. Structural Optimization, 1992, 4(3/4): 250-252.
- [13] STOLPE M, SVANBERG K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance optimization[J]. Structural & Multidisciplinary Optimization, 2001, 22(2): 116-124.
- [14] BURGER F H, DIRKER J, MEYER J P. Three-dimensional conductive heat transfer topology optimisation in a cubic domain for the volume-to-surface problem[J]. International Journal of Heat & Mass Transfer, 2013, 67(12): 214-224.
- [15] Van OEVELEN T, BAELMANS M. Application of topology optimization in a conjugate heat transfer problem [C]// International Conference on Engineering & Applied Sciences Optimization. [S. l.]: IEEE, 2014: 1-10.
- [16] MARCK G, NEMER M, HARION J L, et al. Topology optimization using the simp method for multiobjective conductive problems[J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2012, 61(6): 439-470.
- [17] LI Jiachun, TU Wentu, YANG Xudong. Heat conduction structural topology optimization based on RAMP[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011, 54(2): 1692-1697.
- [18] SUNA Y, FENGWEN W, OLE S. On the non-optimality of tree structures for heat conduction[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2018(4): 660-680.
- [19] BRUNS T E. A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid-void topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2005, 30(6): 428-436.
- [20] 李家春, 叶邦彦, 汤勇, 等. 基于密度法的热传导结构拓扑优化准则算法[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2006, 34(2): 27-32.  
LI Jiachun, YE Bangyan, TANG Yong, et al. Algorithm of topology optimization criteria for heat conduction structure based on density approach[J]. Journal of South China University of Technology(Natural Science Edition), 2006, 34(2): 27-32. (in Chinese)

### 作者简介:

薛红军(1966—),男,博士,副教授。主要研究方向:飞行器设计。

陶才勇(1994—),男,硕士研究生。主要研究方向:结构分析与优化设计。

党思娜(1989—),女,博士研究生。主要研究方向:人机环境中的流体力学。

(编辑:丛艳娟)