

文章编号:1674-8190(2021)04-131-07

复杂应力状态下金属材料屈服模型及有限元验证

刘彦杰,李明强,杨卫平

(航空工业第一飞机设计研究院 强度设计研究所,西安 710089)

摘要: 日益复杂的结构细节特征和载荷作用给飞机金属实体结构的精细化设计提出了极高挑战,对复杂应力状态下金属材料的屈服及失效行为的高精度预测是结构精细化设计与验证的关键。多种典型构形拉伸试验研究发现基于单一曲线假设的 von Mises 屈服理论难以精确描述金属材料在复杂三维应力状态下的屈服行为。为提高复杂应力状态下金属弹塑性行为的预测精度,提出一种基于应力三轴度和 Lode 角参数修正的 von Mises 屈服模型,将该修正模型以 VUMAT 用户材料子程序嵌入 ABAQUS/explicit 求解器对铝合金 2024-T4 试件的屈服行为进行数值模拟。结果表明:本文提出的修正屈服模型比 von Mises 屈服模型更符合试验结果。

关键词: 应力三轴度;Lode角;复杂应力状态;金属屈服;屈服准则

中图分类号: V252; V216.1

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.2021.04.15

文献标识码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



A Theoretical and Numerical Research on Metal Criterion under Complex Stress States

LIU Yanjie, LI Mingqiang, YANG Weiping

(Department of Strength Design, AVIC The First Aircraft Institute, Xi'an 710089, China)

Abstract: It is the fact that the complicity of structural details and loading conditions makes a great challenge of metal structure design. One of the most important aspects is to numerically predict the metal yield and failure behavior under complex stress state in a high accuracy. However, experimental results have revealed that the traditional von Mises criterion can not accurately predict yield behavior of metal under complex stress states. In order to improve the accuracy, a yield criterion modified by stress state parameters of triaxiality and Lode angle is proposed in this paper. Then modified yield criterion is implemented into ABAQUS/explicit with VUMAT user's subroutine and applied to numerical analysis of 2024-T4 coupons. Numerical and experimental results show that the proposed yield criterion can improve the prediction accuracy of metal yield under complex stress state than traditional von Mises criterion.

Key words: stress triaxiality; Lode angle; complex stress state; metal yield; yield criterion

收稿日期:2021-01-20; 修回日期:2021-04-07

通信作者:刘彦杰,lyanjie1988@163.com

引用格式:刘彦杰,李明强,杨卫平.复杂应力状态下金属材料屈服模型及有限元验证[J].航空工程进展,2021,12(4):131-137.

LIU Yanjie, LI Mingqiang, YANG Weiping. A theoretical and numerical research on metal criterion under complex stress states [J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2021, 12(4): 131-137. (in Chinese)

0 引言

金属延性断裂是飞行器金属实体类结构,例如接头、加强框等结构,最重要的破坏形式。复杂的结构细节特征及载荷作用形式对飞行器实体结构的精细化设计和验证提出了较高的要求。金属实体类结构的失效破坏属于金属材料在复杂应力状态下的失效破坏,试验研究表明,在不同应力状态下金属材料呈现出不同的屈服及破坏行为。利用精细有限元数值仿真预测金属结构延性断裂行为成为结构精细化设计的重要手段,其前提是建立合理的适用于复杂应力状态的金属屈服准则。只有在正确预测复杂应力状态下材料初始屈服以及后继屈服塑性硬化行为的基础上,才能进一步研究金属结构断裂行为。

经典 von Mises 理论(J2 理论)认为,复杂应力状态下材料的弹塑性本构关系可以通过引入等效应力和等效应变的概念等价为一维问题,即单一曲线假设。然而,大量试验和理论研究表明,单一曲线假设并不能很好地描述材料在复杂应力状态下的弹塑性本构规律,金属屈服行为与应力状态有着密不可分的关系。目前国内外已有大量文献研究应力状态参数对金属材料屈服面的影响。最早受到关注的是静水应力(或应力三轴度)参数,并产生了多种基于静水应力(或应力三轴度)修正的 von Mises 模型;W. A. Spitzig 等^[1]对铝合金和钢的研究表明静水应力显著影响金属材料的屈服应力,且认为两者线性相关;A. Needleman 等^[2]基于细观孔洞损伤演化模型,提出了一种含损伤量的屈服模型,该模型认为静水应力对屈服面产生非线性影响,即屈服面随着静水压力的增加而收缩;K. Nahshon 等^[3]进一步发展了 Gurson 理论。国内研究人员也对应力三轴度参数对金属屈服的影响进行了理论与试验研究^[4-7]。随着有关金属延性断裂研究的不断深入,Lode 角参数对金属屈服和断裂的影响越来越受到人们的关注^[8-17]。最具代表性的研究工作有:Y. Bai 等^[9-10]、L. Xue^[11]提出了一种包含应力三轴度和 Lode 角参数耦合的修正屈服模型;L. Xue^[12]还提出了一种与损伤变量耦合的弹塑性本构模型,间接体现了静水应力和 Lode 角参数对后继屈服切线模量的影响。但上述研究没有细致研究应力三轴度和 Lode 角参数影响金属屈服行为的差异性,而是直接将应力三轴度和

Lode 角参数耦合在一起共同影响金属初始屈服应力以及后继屈服演化,导致模型复杂、材料常数多且标定困难。

本文首先在文献[9]研究的基础上,结合铝合金 AL2024 材料 5 种典型构形试验件进行拉伸破坏试验,研究应力三轴度和 Lode 角参数对金属材料屈服行为的作用方式;然后根据试验分析提出一种分别考虑应力三轴度对初始屈服应力和 Lode 角参数对塑性切线模量修正的屈服模型,并进行有限元与试验对比验证;最后对耳片结构拉伸试验进行有限元与试验对比分析,以验证本文提出的修正屈服模型的精度。

1 三维应力状态的表征参数

首先对三维应力状态在主应力空间的表征参数进行概要介绍。任意应力张量 σ 都可用三维主应力空间中的向量表示其应力状态,如图 1 所示,向量 \overline{OA} 表示应力状态 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,其中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为主应力分量。图 1 中的 z 轴为等倾线,垂直于等倾线的平面称为等倾面; p 为静水应力(材料受压缩时为正); σ_{eq} 为 Mises 等效应力。

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (1)$$

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2)$$

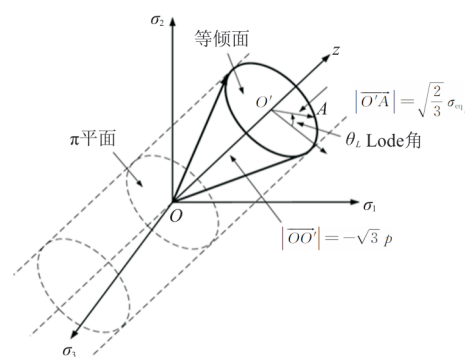


图 1 应力状态在主应力空间中的表示
Fig. 1 Stress state in principal stress space

此外,在描述静水应力 p 时常用其无量纲形式,即应力三轴度 η ,定义如下:

$$\eta = \frac{-p}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \quad (3)$$

主应力状态 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 在等倾面上的投影为主应力偏量 (s_1, s_2, s_3) ,如图 2 所示。

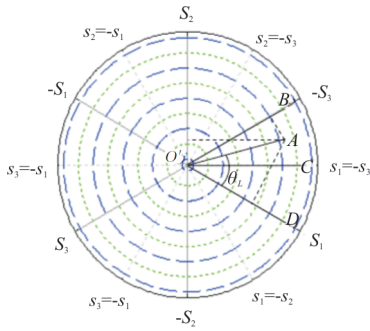


图2 主应力在等倾面内的投影以及Lode角
Fig. 2 Demonstration of Lode angle

在等倾面内,主应力偏量的分布情况可用Lode角 θ_L 表示,定义为

$$\theta_L = \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left[2 \left(\frac{s_2 - s_3}{s_1 - s_3} \right) - 1 \right] \right\} + \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

其几何意义为加载方向 $\overline{O'A}$ 与最大主应力偏量 s_1 方向之间的夹角。根据等倾面的对称性,可知Lode角的取值范围为 $[0, \pi/3]$ 。文献中也常用Lode角的归一化参数 $\bar{\theta}$ ($\bar{\theta} \in [-1, 1]$), 记作:

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{6\theta_L}{\pi} \quad (5)$$

综上所述,任意三维应力状态在主应力空间除可用笛卡尔坐标系 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 表示外,也可用球坐标系 $(\eta, \bar{\theta}, \sigma_{eq})$ 表示(如图1所示)。本文将在球坐标系 $(\eta, \bar{\theta}, \sigma_{eq})$ 下研究应力状态参数对金属材料屈服的影响。

2 基于应力状态修正的金属屈服准则

试验和理论研究结果表明,应力三轴度(或静水应力)和Lode角参数会对材料的初始屈服和后继屈服产生不可忽略的影响。W. A. Spitzig等^[1]认为初始屈服应力随材料静水应力的变化而线性改变;Y. Bai等^[9]则认为应力三轴度和Lode角均会影响材料初始屈服和后继屈服行为,并给出了虑及应力三轴度和Lode角参数的修正屈服准则。本文结合试验和数值仿真研究发现,应力三轴度主要影响材料初始屈服应力值,而Lode角参数主要对后继屈服的塑性切线模量产生影响。

本文提出一种分别虑及应力三轴度对初始屈服应力以及Lode角参数对塑性切线模量影响的修正屈服理论。其中,初始屈服应力修正表达式为

$$\bar{\sigma}_{y0} = \sigma_{y0} \cdot \left[1 - k \left(\eta - \frac{1}{3} \right) \right] \quad (6)$$

式中: $\bar{\sigma}_{y0}$ 为修正后的初始屈服应力; σ_{y0} 为材料标准试件初始屈服应力; k 为修正系数,是材料常数。

由式(6)可得,当应力三轴度 η 为1/3时(光滑圆棒拉伸应力状态),该修正初始屈服应力与材料标准试件初始屈服应力相同。试验结果表明, k 通常是一个正数,当应力三轴度增加时,材料实际的初始屈服应力降低^[6]。

后继屈服的塑性切线模量修正表达式为

$$H_r(\epsilon_p) = H(\epsilon_p) \cdot [1 - \omega(1 - |\bar{\theta}|)] \quad (7)$$

式中: H 为由光滑圆棒拉伸试验获得的材料塑性切线模量; H_r 为虑及Lode角影响的修正塑性切线模量;修正系数 ω 为材料常数。

$$H(\epsilon_p) = \frac{d\sigma_{eq}}{d\epsilon_p} \quad (8)$$

当 $|\bar{\theta}| = 1$ 时,修正塑性切线模量与材料标准试件塑性切线模量相同。试验结果表明, ω 通常是一个正数,当 $|\bar{\theta}|$ 降低(即越接近广义剪切状态 $\bar{\theta} = 0$)时,材料的塑性切线模量降低^[6-7]。为了方便计算,本文采用三参数指数函数对光滑圆棒拉伸试验得到的材料弹塑性应力应变关系进行拟合,即:

$$\sigma_{eq}(\epsilon_p) = \sigma_{y0} + K\epsilon_p^n \quad (9)$$

式中: σ_{y0} 、 K 和 n 为材料常数。

综上所述,结合初始屈服应力与塑性切线模量修正,本文提出的修正屈服应力表达式为

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left[1 - k \left(\eta - \frac{1}{3} \right) \right] + K \left[1 - \omega(1 - |\bar{\theta}|) \right] \epsilon_p^n \quad (10)$$

式中: σ_{y0} 、 K 、 n 、 k 和 ω 为屈服准则常数,其中前三个常数为经典Mises屈服准则常数,后两个常数为修正常数。

由式(10)可知,修正的屈服面可写为

$$f = \sigma_{eq} - \left\{ \sigma_{y0} \left[1 - k \left(\eta - \frac{1}{3} \right) \right] + K \left[1 - \omega(1 - |\bar{\theta}|) \right] \epsilon_p^n \right\} = 0 \quad (11)$$

根据相关联的Prandtl-Reuss塑性流动增量理论,塑性应变增量可写为

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (12)$$

式中: ϵ_{ij}^p 为塑性应变张量; $d\lambda$ 为等效塑性应变增量系数; $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ 为塑性流动方向(即屈服面法向)。

通过张量求导计算,可得

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \left\{ \frac{3}{2\sigma_{eq}} s_{ij} + \sigma_{y0} k \left(\frac{1}{3\sigma_{eq}} \delta_{ij} - \frac{3\eta}{2\sigma_{eq}^2} s_{ij} \right) + K\epsilon_p^n \omega \frac{6}{\pi} \frac{3}{\sin 3\theta_L} \left(\frac{\delta_{ij}}{3\sigma_{eq}} + \frac{|\cos 3\theta_L|}{2\sigma_{eq}^2} s_{ij} - \frac{3}{2\sigma_{eq}^3} s_{ik} s_{kj} \right) \right\} \quad (13)$$

该屈服准则中将应力三轴度与Lode角参数的影响解耦,不仅减少了模型的材料常数,还有利于简化材料标定试验及数据处理过程。

3 复杂应力状态金属拉伸试验

以航空航天领域常用的AL2024-T4铝合金材料为例,对包含光滑圆棒、带缺口圆棒、带缺口槽平板等五种不同构形的元件级试验件进行拉伸试验,研究不同应力状态下金属构件的屈服行为。详细的试验件构型、试验内容和结果参见文献[13]。

4 元件试验与分析结果对比

以ABAQUS/Explicit求解器为平台,采用VUMAT用户材料子程序开发修正屈服准则算法,对第3节所述5种典型构形元件级试件拉伸试验进行数值模拟,检验第2节提出的修正屈服准则对复杂应力状态下材料屈服行为的预测精度。

由于试验件构型和加载的对称性,本文采用4结点轴对称单元建立圆棒模型,采用8结点实体单元建立平板模型,所有模型在缺口区域内进行网格细化。有限元模型在一侧固支,另一侧加载,并施加对称约束。

结合试验结果与有限元数值分析,可获取修正屈服准则常数。以铝合金AL2024材料为例,修正屈服准则的材料常数为: $\sigma_{y0}=380$ MPa, $K=328$ MPa, $n=0.22$, $k=0.5$, $\omega=0.2$ 。分别采用传统 von Mises 屈服准则、只对初始屈服应力修正的屈服准则(式(6))、以及初始屈服应力和塑性切线模量同时修正的屈服准则(式(6)和式(7))进行对比分析,数值仿真结果如图3~图7所示,图中横轴表示引伸计位移;图例“ η 修正”表示只修正初始屈服应力,“ η 和 θ 修正”表示同时修正初始屈服应力和塑性切线模量。各类型构件真实试验与模拟计算误差详见文献[13]。

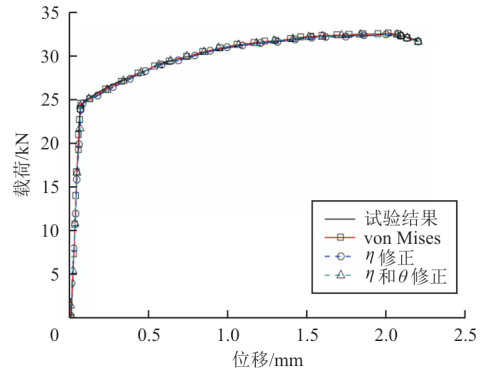


图3 光滑圆棒试验与数值模拟的载荷—位移曲线对比

Fig. 3 Comparison of test and simulation of smooth bar in force-displacement curves

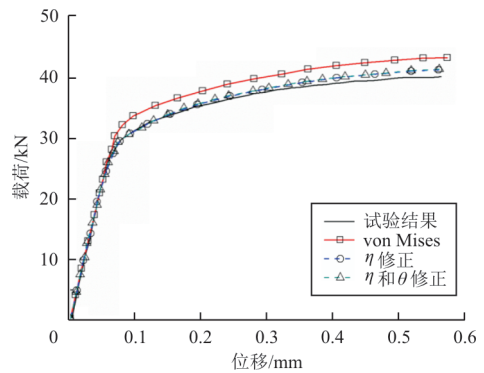


图4 小缺口圆棒试验与数值模拟的载荷—位移曲线对比

Fig. 4 Comparison of test and simulation of small notched bar in force-displacement curves

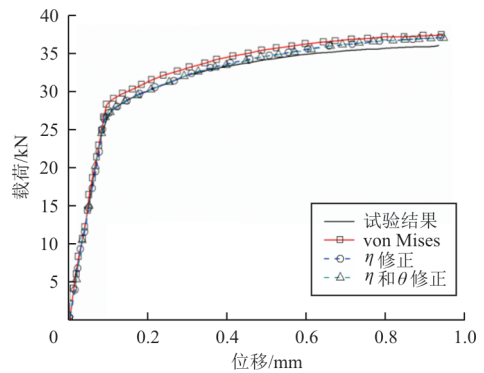


图5 大缺口圆棒试验与数值模拟的载荷—位移曲线对比

Fig. 5 Comparison of test and simulation of large notched bar in force-displacement curves

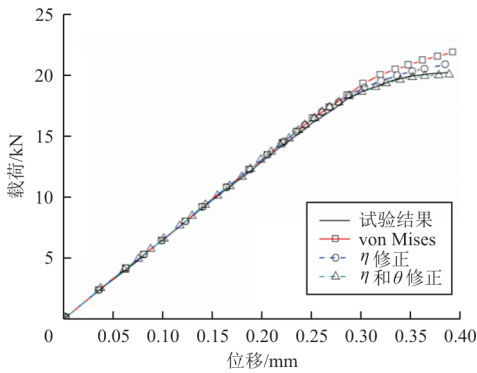


图 6 小缺口槽平板试验与数值模拟的载荷—位移曲线对比
Fig. 6 Comparison of test and simulation of small grooved plate in force-displacement curves

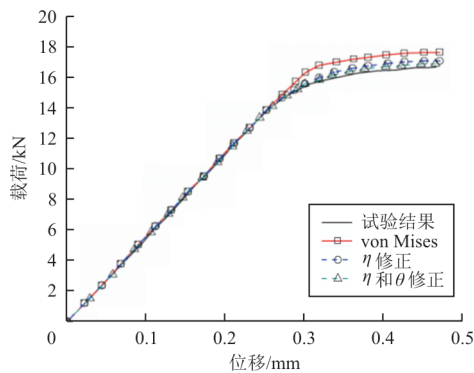


图 7 大缺口槽平板试验与数值模拟的载荷—位移曲线对比
Fig. 7 Comparison of test and simulation of large grooved plate in force-displacement curves

数值计算与试验结果的误差如表 1~表 2 所示,可以看出:对于初始屈服应力,最高误差出现在应力三轴度最高的小缺口圆棒和小缺口槽平板试件上,误差分别为 8.21% 和 13.56%;但对于光滑圆棒试件,由图 3 及表 1 的数据可得,数值模拟与真实试验误差极小。据此可得出基于单一曲线假设的 von Mises 屈服理论在材料处于一维应力状态下能与真实试验精确符合,然而却不足以适应更常见的复杂应力状态。

表 1 试验与模拟结果的初始屈服载荷误差
Table 1 Error of test and simulation in yield strength

试件	初始屈服载荷误差/%		
	von Mises 屈服准则	修正初始屈服应力	修正初始屈服应力和切线模量
光滑圆棒	0.41	0.41	0.41
小缺口圆棒	8.21	1.28	1.28
大缺口圆棒	5.26	0.58	0.58
小缺口槽平板	13.56	1.58	1.58
大缺口槽平板	5.67	1.12	1.12

表 2 试验与模拟结果的破坏载荷误差
Table 2 Error of test and simulation in failure strength

试件	破坏载荷误差/%		
	von Mises 屈服准则	修正初始屈服应力	修正初始屈服应力和切线模量
光滑圆棒	0.46	0.46	0.46
小缺口圆棒	8.59	2.52	2.52
大缺口圆棒	4.34	2.69	2.69
小缺口槽平板	15.11	6.20	2.09
大缺口槽平板	6.48	3.22	1.82

从数值预测与试验结果的对比中可以看出,不同准则的精度差异主要体现在对带缺口圆棒和带缺口槽平板试验件的预测上。对于初始屈服而言,经典 von Mises 准则在预测缺口半径小、应力三轴度大的试验时存在较大误差,带小缺口的圆棒和平板试验的误差均超过了 8%。通过引入应力三轴度参数对 von Mises 初始应力进行修正后,明显提高了带缺口试验件初始屈服载荷的预测精度。

对比缺口圆棒试验和缺口槽平板试验发现,初始屈服修正准则对缺口圆棒试验的预测精度要高于对缺口槽平板试验的预测精度。这说明虽然应力三轴度和 Lode 角对材料初始屈服均产生影响,但应力三轴度对初始屈服应力的影响起主导作用。Lode 角更重要的作用体现在对塑性流动(即塑性切线模量)的影响上,这也是本文修正屈服准则的试验基础。

对于试验件后继屈服塑性流变行为,从图 4~图 7 以及表 2 可以看出:只修正初始屈服应力的准则已经能很好地符合缺口圆棒试验件后继屈服阶段的塑性硬化曲线,在此基础上引入 Lode 角对切线模量的修正,基本没有改善缺口圆棒试验的预测精度;但切线模量修正明显提高了带缺口槽平板试验塑性硬化阶段的预测精度。从表 2 可看出:切线模量修正使带缺口槽平板试件断裂载荷的数值预测误差降低至 2% 左右。

上述研究表明,塑性切线模量修正对提高材料复杂应力状态下塑性流动行为的预测精度具有重要意义。

5 耳片结构试验与分析验证

选取典型金属耳片拉伸试验,应用本文提出

的修正屈服准则对耳片结构屈服过程进行研究,并与试验结果、经典 von Mises 屈服准则以及 Bai-Wierzbicki 屈服准则的分析结果进行对比。

耳片结构平面尺寸及加载方式如图 8 所示,耳片厚度为 10 mm;结构左端固支,右端通过接触将销钉的位移加载传递到耳片结构上,加载方向与耳片轴线呈 5° 夹角。耳片材料为铝合金 AL2024,其具体的材料属性见第 4 节所述。销钉材料为合金钢,其弹性模量为 210 GPa,泊松比为 0.3。

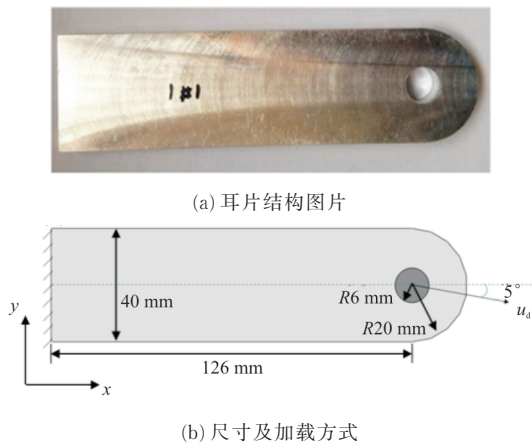


图 8 耳片结构平面尺寸及加载方式示意

Fig. 8 Sketch of the size and loading of lug structure

应用本文提出的修正屈服准则的分析结果与试验结果对比如图 9 所示,图中同时给出了经典 Mises 屈服准则、Bai-Wierzbicki 屈服准则的分析结果。

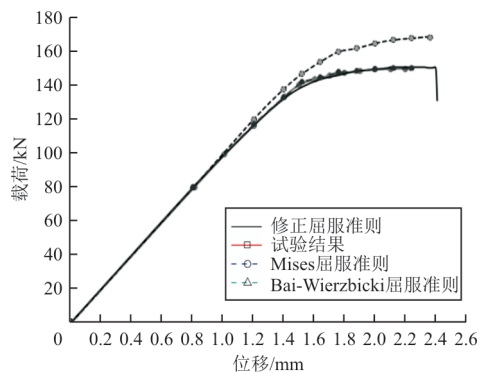


图 9 耳片结构拉伸试验与数值分析结果对比

Fig. 9 Comparison of experiment and simulation of lug structure

从图 9 可以看出:经典 Mises 屈服准则预测的载荷-位移曲线与试验结果在弹塑性阶段存在明显偏差,而本文提出的修正屈服准则与 Bai-Wierz-

bicki 屈服准则分析结果基本一致,且和试验结果吻合较好,表明基于应力状态修正的屈服准则能够显著提高复杂应力状态金属结构弹塑性行为。对比本文提出的修正屈服准则与 Bai-Wierzbicki 屈服准则,结果表明本文提出的应力三轴度和 Lode 角参数分别对初始屈服应力与后继屈服斜率的解耦准则的合理性。本文的解耦修正准则不仅形式变得更加简洁,同时也简化了准则标定的元件试验规模,更有利于工程应用。

6 结 论

(1) 对于三维复杂应力状态下的拉伸试验,使用经典 von Mises 屈服准则时,有限元模拟计算的初始屈服应力以及后继屈服应力结果与试验结果存在较大差异,揭示了应力状态是影响材料屈服及塑性流动的一个重要因素。

(2) 本文结合试验研究,发现应力三轴度主要影响材料初始屈服应力,Lode 角参数主要影响切线模量,并提出了一个虑及两者的修正 von Mises 屈服准则,给出了修正准则的塑性流动方程。

(3) 试验与有限元对比分析表明该准则能够很好地预测复杂应力状态下金属结构的初始屈服及后继屈服塑性硬化行为,对工程应用有较高参考价值。

参 考 文 献

- [1] SPITZIG W A, SOBER R J, RICHMOND O. The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and HY-80 steels and its implications for plasticity theory [J]. Metallurgical Transactions A, 1976, 7A: 1703-1710.
- [2] NEEDLEMAN A, TVERGAARD V. A micromechanical analysis of the ductile-brittle transition [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1999, 62(4): 317-338.
- [3] NAHSHON K, HUTCHINSON J W. Modification of the Gurson model for shear failure [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2008, 27(1): 1-17.
- [4] 邹萍, 钟鸣, 龙志林, 等. Mohr-Coulomb 屈服准则与 Drucker-Prager 屈服准则在块体非晶合金中的应用 [J]. 中国有色金属学报, 2015, 25(5): 11-15.
ZOU Ping, ZHONG Ming, LONG Zhilin, et al. Applications of Mohr-Coulomb yield criterion and Drucker-Prager yield criterion in bulk amorphous alloys [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2015, 25(5): 11-15. (in Chinese)
- [5] 杜汉斌, 杨海峰, 胡峥楠, 等. 车用 6061-T5 铝合金的力学

- 特性及各向异性硬化行为的屈服准则[J]. 中国有色金属学报, 2019, 29(3): 17-26.
- DU Hanbin, YANG Haifeng, HU Zhengnan, et al. Mechanical properties and yield criteria with anisotropic hardening of 6061-T5 aluminum alloy used in vehicle [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2019, 29(3): 17-26. (in Chinese)
- [6] 陈岑, 刘芳, 付强, 等. 双轴拉伸应力下后继屈服面的演化研究[J]. 航空学报, 2012, 33(12): 2230-2239.
- CHEN Cen, LIU Fang, FU Qiang, et al. Investigation of subsequent yield surface evolution under biaxial tension[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(12): 2230-2239. (in Chinese)
- [7] 伍晓宇. 屈服准则统一表达式的推广及切块法的改进[J]. 塑性工程学报, 2000(1): 38-40.
- WU Xiaoyu. Extension of united expression of yield criteria and amendment of slab method[J]. Journal of Plasticity Engineering, 2000(1): 38-40. (in Chinese)
- [8] 王文平, 刁可山, 吴向东, 等. 板料屈服行为及强化规律的研究进展[J]. 机械工程学报, 2013, 49(24): 7-14.
- WANG Wenping, DIAO Keshan, WU Xiangdong, et al. Review on yielding and hardening behavior of sheet metal [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(24): 7-14. (in Chinese)
- [9] BAI Y, WIERZBICKI T. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence [J]. International Journal of Plasticity, 2008, 24: 1071-1096.
- [10] BAI Y, WIERZBICKI T. A comparative study of three groups of ductile fracture loci in the 3D space [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2015, 135(9): 147-167.
- [11] XUE L. Damage accumulation and fracture initiation in uncracked ductile solids subject to triaxial loading [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44: 5163-5181.
- [12] XUE L. Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2008, 75(11): 3343-3366.
- [13] 刘彦杰. 工程金属结构非线性延性断裂的数值分裂算法[D]. 西安: 西北工业大学, 2017.
- LIU Yanjie. Numerical decomposition method for nonlinear ductile fracture of engineering metallic structure[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2017. (in Chinese)
- [14] 杨锋平, 孙秦. 屈服准则及切线模量修正的弹塑性计算模型[J]. 力学学报, 2010, 42(4): 216-222.
- YANG Fengping, SUN Qin. A new computational model of metal plasticity based on von mises criterion correction and tangent modulus correction [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010, 42(4): 216-222. (in Chinese)
- [15] LIU Y J, SUN Q, FAN X L, et al. A stress-invariant based multi-parameters ductile progressive fracture model [J]. Materials Science & Engineering A, 2013, 576(4): 337-345.
- [16] LIU Y J, SUN Q. A dynamic ductile fracture model on the effects of pressure, Lode angle and strain rate [J]. Materials Science & Engineering A, 2014, 589(2): 262-270.
- [17] FAN X L, SUN Q, LIU Y J. A modified ductile fracture model incorporating synergistic effects of pressure and lode angle [J]. International Journal of Applied Mechanics, 2012, 4(2): 1250022.

作者简介:

刘彦杰(1988—),男,博士,工程师。主要研究方向:飞机结构强度、结构优化、非线性计算力学。

李明强(1980—),男,硕士,高级工程师。主要研究方向:飞机机身结构强度设计。

杨卫平(1965—),男,博士,研究员、副总设计师。主要研究方向:飞行器结构强度设计、复合材料结构完整性分析与应用。

(编辑:马文静)