

文章编号:1674-8190(2022)06-069-11

区间不确定信息下可修系统基于幂律过程的贝叶斯可靠性评估方法研究

王燕萍,魏宇鹏,吕震宙
(西北工业大学 航空学院,西安 710072)

摘要: 贝叶斯方法常用于小子样场合下航空航天等领域中可修系统的可靠性评估,由于一些不确定因素影响致使无法精确收集先验信息和/或可修系统的故障信息,但却可获得其上下界信息。针对区间不确定信息情形,提出多台可修系统当其失效过程服从幂律过程(PLP)时的贝叶斯可靠性分析方法,将信息先验下PLP模型基于区间信息的贝叶斯分析转化为所求目标函数恰是该先验下PLP模型传统贝叶斯分析的约束优化问题;通过具体工程实例对本文所提方法的可行性、有效性进行验证。结果表明:本文所提出的贝叶斯可靠性分析方法能够为小子样场合下,考虑不确定性因素影响时可修系统的可靠性评估问题研究提供一种值得参考的方法。

关键词: 可修系统;幂律过程;贝叶斯方法;区间数;条件约束优化;演化策略

中图分类号: V215.7; TB114.3; V267

文献标识码: A

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.2022.06.07

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Research on Bayesian Reliability Evaluation Method of Repairable Systems Based on Power Law Process under Interval Uncertain Information

WANG Yanping, WEI Yupeng, LYU Zhenzhou

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Bayesian method is commonly used in the reliability assessment of repairable systems with small samples in fields such as aerospace. The knowledge about the informative prior and/or failure data from repairable systems may not be collected as precisely as possible due to uncertain factors, but can be obtained in terms of lower and upper bounds. For the case of such interval uncertainty information, the Bayesian reliability analysis method of multiple repairable whose failure process can follow the power law process (PLP) is studied in this paper. Under the informative priors, the interval-based Bayesian posterior analysis of the PLP is essentially transformed into solving the constrained optimization problem in which the objective function is just the traditional Bayesian posterior analysis result of the PLP under the informative priors. The feasibility and effectiveness of the proposed method is verified with specific engineering examples. The results show that the proposed interval-based Bayesian method of the PLP can provide a reference method for the reliability assessment of repairable systems with small samples in consideration of the influence of uncertain factors.

Key words: repairable system; power law process; Bayesian method; interval number; constrained optimization; evolution strategy

收稿日期: 2021-12-08; 修回日期: 2022-05-20

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(11902254)

通信作者: 王燕萍, yanpingwang@nwpu.edu.cn

引用格式: 王燕萍, 魏宇鹏, 吕震宙. 区间不确定信息下可修系统基于幂律过程的贝叶斯可靠性评估方法研究[J]. 航空工程进展, 2022, 13(6): 69-79.

WANG Yanping, WEI Yupeng, LYU Zhenzhou. Research on Bayesian reliability evaluation method of repairable systems based on power law process under interval uncertain information[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2022, 13(6): 69-79. (in Chinese)

0 引言

航空航天等领域中可修系统在小子样场合下的可靠性评估问题一直以来都备受关注,由于幂律过程(Power Law Process,简称PLP)^[1]的数学易处理性以及具有较好的工程适用性,基于该参数模型对可修系统开展了诸多可靠性评估方法研究,主要分为频率论方法(Frequentist Approach)^[1-3]和贝叶斯方法(Bayesian Approach)^[4-10],其中贝叶斯方法更适于处理小子样问题,亦可将可修系统在失效、时间截尾情形下的可靠性分析进行统一。可修系统基于PLP模型的贝叶斯可靠性分析,在确定先验信息、收集可修系统故障数据以及求解贝叶斯后验分析时将遇到以下问题。

首先,PLP模型参数先验信息获取的精准与否。实际贝叶斯应用中,PLP模型参数常用先验有一类无信息先验^[4-13]和均匀分布^[4,14-15]、Beta分布^[16]、广义Beta分布^[17]、Gamma分布^[12-13,18-21]、自然共轭先验^[22-23]以及准共轭先验^[24]等信息先验。无信息先验可直接应用,相关研究较多且深入细致。应用信息先验时,其所含超参数需先指定确切超参数取值,可通过收集先验矩的历史信息和/或专家知识来确定^[4,14,21-22,24]。例如,基于PLP模型对正处于可靠性增长开发测试计划中的一种航空发动机进行可靠性预测,预定时间内平均失效次数的信息先验为二参数Gamma分布,由其他相似发动机经验所给专家意见得知先验矩(均值和变异系数)信息^[14],经简单计算可确定超参数值。通常以充足可信度为先验矩赋予一个确切值是困难的,直接做法是为每个超参数再指定一个先验,即超先验,为确定超先验还需得知更多与其相关的信息。考虑到在无信息或信息先验下PLP模型参数联合后验通常是无解析解的复杂多重积分,若为超参数指定超先验,将致使基于模型参数联合后验所开展贝叶斯可靠性分析变得愈加复杂和困难。实际上,基于相似发动机的历史贮存信息,专家易给出正经历开发测试航空发动机在指定时间内平均失效次数的平均取值和变异系数的上下界信息,此时先验矩信息可表示为实值闭区间,也即为每个先验矩指定一个实值区间数^[25],由区间运算法则结合超参数与先验矩之间的函数关系可知超参数也是区间数。基于区间值描述PLP模型参数的信息先验,如何开展可修系统的贝叶斯可

靠性分析有待探讨。

其次,可修系统故障数据收集精准与否。由于环境波动、观测者疏忽、实验中资源限制等不确定因素的影响,致使可修系统的确切故障时间无法被观测到,但可获知系统发生故障的时间范围。例如,某型飞机电传系统备用电瓶故障是一种隐蔽功能故障,航空公司对此故障采取每隔1 000 h维修一次,所收集电瓶故障数据是在[1 000 h, 2 000 h]内发生3次故障的类似数据^[26]。这种发生在待观察时间区间内失效次数所构成数据被称为分组数据,聚合数据,或区间删失型数据^[2,7,26-28]。针对分组数据,MIL-HDBK-189^[3]建议每个时间区间内失效次数不少于5,如不满足需将相邻两个或多个时间区间合并,直至合并后区间内失效次数达到要求为止^[29]。直接使用区间数据的PLP模型贝叶斯分析较复杂且难以处理^[7],J. Kyparisis等^[17]给出一种近似贝叶斯推断。借助待观察时间区间内确切失效时间(实际未被观察到)的潜在变量,A. Sen^[7]针对来自单台可修系统的区间数据给出了PLP模型强度的贝叶斯估计和预测,并使用Markov Chain Monte Carlo(MCMC)与抽样方法(如加权自助法^[25,30]、自适应取舍抽样法^[31]等)混合的方法简化复杂贝叶斯后验分析,尤其当PLP模型参数采用信息先验情形。工程实际中常遇到如此情形,试验中投试了多台可修系统,但每个待观察时间区间内仅观测到一次故障,甚至观察到系统总故障次数也较少。显然,上述针对失效过程服从PLP模型的可修系统的区间数据所开展贝叶斯分析方法并不适用于此种情形,合理将此情形中可修系统的故障时间视为以区间数形式收集,进而如何开展多台可修系统基于PLP模型的贝叶斯分析值得深入研究。

最后,基于PLP模型参数后验的复杂贝叶斯分析求解。单台可修系统基于PLP模型在无信息、信息先验下的贝叶斯分析有一个共同问题,模型参数联合后验通常是无解析解的复杂多重积分,可靠性评估量则是模型参数的各种函数值,为简化基于模型参数后验的贝叶斯分析,MCMC、密度抽样方法及其混合方法被采用^[7,10,32],这样处理虽不复杂但也并不简单。此外,若考虑多台可修系统^[33]、以及区间值描述信息先验和系统故障时间以区间数收集的情形,基于PLP模型的贝叶斯可靠性分析求解方法有待进一步研究。

考虑到PLP模型参数取无信息先验时预定时间内的平均失效次数和PLP模型形状参数的后验分布均为Gamma分布^[6,34],诸多研究者将其作为PLP模型参数的一种合理信息先验^[4,7,12-14,18,20],本文同理。本文首先在Gamma信息先验下提出一种简单易行的多台可修系统基于PLP模型的传统贝叶斯分析方法,然后通过建立目标函数恰是该先验下PLP模型传统贝叶斯分析结果的约束优化问题,给出当先验和可修系统故障时间具有区间值不确定信息时多台可修系统基于PLP模型的贝叶斯可靠性评估方法,并进行实例验证。

1 信息先验下可修系统基于PLP模型的贝叶斯分析方法

具有强度函数为 $\lambda(t)=(\beta/\theta)(t/\theta)^{\beta-1}$, ($\theta>0, \beta>0$)和均值函数为 $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)du=(t/\theta)^\beta$ 的非齐次泊松过程称之为幂律过程,也称为威布尔过程、Crow模型或AMSAA模型。假设 k 台同型可修系统同时投入运行,每台可修系统的失效过程都服从相同PLP模型。第 i 台可修系统的第 j 次失效时间为 t_{ij} ,第 i 台可修系统的在运行期间的失效次数为 $n_i(n_i \geq 1)$ 。 k 台可修系统的总失效次数为 $N=\sum_{i=1}^k n_i$ 。第 i 台可修系统独立地运行至时刻 T_i 处截尾,如果它是失效截尾则有 $T_i=t_{in}$,而如果它是时间截尾则有 $T_i>t_{in}$ 。多台可修系统失效时间 $\mathbf{t}=t_{ij}(i=1, \dots, k, j=1, \dots, n_i)$ 的似然函数^[35]为

$$l(\mathbf{t}|\theta, \beta) = \prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} \lambda(t_{ij}) \exp[-\Lambda(T_i)] \right\} = \frac{\beta^n}{\theta^{n\beta}} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} t_{ij} \right)^{\beta-1} \exp \left[-\sum_{i=1}^k \left(\frac{T_i}{\theta} \right)^\beta \right] \quad (1)$$

令 $\Lambda_T = \Lambda(T)$,取 Λ_T 和 β 的信息先验分别为如下Gamma分布^[7,18,20]。

$$\pi(\Lambda_T) = f(\Lambda_T; a_\Lambda, b_\Lambda) \quad (2)$$

$$\pi(\beta) = f(\beta; a_\beta, b_\beta) \quad (3)$$

式中: $f(x; a, b)$ 为参数 a 和 b 的Gamma分布的概率密度函数, $f(x; a, b) = b^a x^{a-1} \exp\{-bx\}/\Gamma(a)$, ($x, a, b > 0$)。

式(2)和式(3)中的超参数 $a_\Lambda, b_\Lambda, a_\beta, b_\beta$ 可由 Λ_T 和 β 的先验矩信息(均值和变异系数)计算得到。令超参数向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_\Lambda, b_\Lambda, a_\beta, b_\beta)$,先验矩向量 $\boldsymbol{\varphi} = (E_\Lambda, CV_\Lambda, E_\beta, CV_\beta)$ 。如果得到了 Λ_T 和 β 的先验矩的确切值, $\boldsymbol{\alpha}$ 可由下式确定:

$$a_\Lambda = CV_\Lambda^{-2} \quad (4)$$

$$b_\Lambda = E_\Lambda^{-1} CV_\Lambda^{-2} \quad (5)$$

$$a_\beta = CV_\beta^{-2} \quad (6)$$

$$b_\beta = E_\beta^{-1} CV_\beta^{-2} \quad (7)$$

改变式(2)中的变量, Λ_T 的先验分布可以转换为 θ 的一个条件分布,即 $\pi(\theta|\beta) = \beta b_\Lambda^{a_\Lambda} T^{\beta a_\Lambda} \theta^{-\beta a_\Lambda - 1} \exp\{-b_\Lambda(T/\theta)^\beta\}/\Gamma(a_\Lambda)$,则 θ 和 β 的联合后验概率密度为

$$\pi(\theta, \beta|\mathbf{t}) \propto l(\mathbf{t}|\theta, \beta) \pi(\theta|\beta) \pi(\beta) \propto \frac{\beta^{n+a_\beta} T^{\beta a_\Lambda}}{\theta^{\beta n + \beta a_\Lambda + 1}} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} t_{ij} \right)^{\beta-1} \cdot \exp \left\{ -b_\beta \beta - b_\Lambda \left(\frac{T}{\theta} \right)^\beta - \sum_{i=1}^k \left(\frac{T_i}{\theta} \right)^\beta \right\} \quad (8)$$

在工程应用中,经常对一些PLP模型参数 (θ, β) 的函数估计感兴趣,如可修系统在给定时刻处的失效强度^[6,36-38]、MTBF^[11,37,39]和系统可靠度^[5,38]的估计值,可修系统在给定时间内期望失效次数的预测以及失效时间的预测^[5,11,13,20,34]等,这是因为这些模型参数函数的估计在评估可修系统的可靠性或在作出可靠性管理决策方面发挥着十分重要的作用。令 $g(\theta, \beta)$ 为 (θ, β) 的函数,在 $g(\theta, \beta)$ 的后验分析中常需对 (θ, β) 的联合后验概率密度进行各种积分计算,即:

$$G = \int_0^\infty \int_0^\infty g(\theta, \beta) \cdot \pi(\theta, \beta|\mathbf{t}) d\theta d\beta \quad (9)$$

通常此积分无解析解,加之后验概率密度 $\pi(\theta, \beta|\mathbf{t})$ 的形式较复杂,需要进行数值积分方法求解,MCMC方法和一些概率密度函数的抽样方法被用来简化PLP模型的复杂后验分析^[6,7,15,30-31,34]。针对式(2)和式(3)的Gamma信息先验,文献[18-19]采用矩等效方法将 $\Lambda(T)$ 的先验信息转换为所有系统在 y 时刻同时截尾的 $\Lambda(y)$ 的先验信息,并基于此给出了PLP模型贝叶斯分

析的一种近似方法。本文采用重要抽样技术给出 Gamma 信息先验下多台可修系统基于 PLP 模型的一种简单有效的贝叶斯分析及其预测分析方法。

令 $H \equiv H(\theta, \beta) = \sum_{i=1}^k (T_i/\theta)^\beta$ 。利用 (θ, β) 和 (H, β) 之间的关系, $g(\theta, \beta)$ 可以转化为 H 和 β 的函数, 记为 $\delta(H, \beta)$ 。利用二重积分的换元公式, 上述积分可以表示为

$$\int_0^\infty \int_0^\infty g(\theta, \beta) \cdot \pi(\theta, \beta | \mathbf{t}) d\theta d\beta = \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(H, \beta) \cdot \pi(H, \beta | \mathbf{t}) dH d\beta \quad (10)$$

由式(8)可以得到 H 和 β 的联合后验概率密度 $\pi(H, \beta | \mathbf{t})$ 为

$$\pi(H, \beta | \mathbf{t}) \propto f\left(H; n + a_\Lambda, 1 + b_\Lambda T^\beta / \sum_{i=1}^k T_i^\beta\right) \cdot f\left(\beta; n + a_\beta, b_\beta + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \ln \frac{T_i}{t_{ij}}\right) \cdot w(H, \beta) \quad (11)$$

其中 $w(H, \beta) = T^{\beta a_\Lambda} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} T_i^\beta \left(\sum_{i=1}^k T_i^\beta + b_\Lambda T^\beta\right)^{-(n+a_\Lambda)}$ 。令 $\pi_0(H, \beta | \mathbf{t})$ 表示式(11)的右端项, $\pi_0(H, \beta | \mathbf{t})$ 与 $\pi(H, \beta | \mathbf{t})$ 之间仅相差一个正则化因子。于是, 式(9)积分可以表示为

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \delta(H, \beta) \cdot \pi(H, \beta | \mathbf{t}) dH d\beta = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \delta(H, \beta) \cdot \pi_0(H, \beta | \mathbf{t}) dH d\beta}{\int_0^\infty \int_0^\infty \pi_0(H, \beta | \mathbf{t}) dH d\beta} \quad (12)$$

通常式(12)没有解析解, 但利用重要抽样技术可以获得其数值解, 具体步骤如下。

步骤 1: 从概率密度 $f\left(\beta; n + a_\beta, b_\beta + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \ln \frac{T_i}{t_{ij}}\right)$ 抽取 β_j ;

步骤 2: 在给定 β_j 值的条件下, 从概率密度 $f\left(H; n + a_\Lambda, 1 + b_\Lambda T^{\beta_j} / \sum_{i=1}^k T_i^{\beta_j}\right)$ 抽取 H_j 。

重复步骤 1~步骤 2 共 m 次, 得到样本

$\{(H_j, \beta_j), J=1, \dots, m\}$ 。则式(12)的近似解可由式(13)获得:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \delta(H, \beta) \cdot \pi(H, \beta | \mathbf{t}) dH d\beta \approx \frac{\sum_{j=1}^m \delta(H_j, \beta_j) \cdot w(H_j, \beta_j)}{\sum_{j=1}^m w(H_j, \beta_j)} \quad (13)$$

因此, 式(9)积分的近似解可由式(13)得到。

此外, 基于样本 $\{(H_j, \beta_j), J=1, \dots, m\}$, 式(13)给出了函数 $\delta(H, \beta)$ 在平方损失函数下的贝叶斯估计, 进一步还可以给出 $\delta(H, \beta)$ 的贝叶斯可信区间估计和贝叶斯 HPD 区间估计^[20, 40]。

2 区间不确定信息下可修系统基于 PLP 模型的贝叶斯方法

在 Gamma 信息先验下可修系统基于 PLP 模型的传统贝叶斯分析中, 可以将超参数 α 和失效时间 \mathbf{t} 视为输入, 式(9)后验积分的值视为输出, 则式(9)后验积分就是一个实值黑盒函数 $G(\alpha, \mathbf{t})$ 。当输入中的超参数 α 和/或失效时间 \mathbf{t} 以区间数形式 α^I 和/或 \mathbf{t}^I (上标 I 表示区间) 给定时, 函数 $G(\alpha, \mathbf{t})$ 变为一个区间值函数 $G(\alpha^I, \mathbf{t})$ 或 $G(\alpha^I, \mathbf{t}^I)$, 其相应输出值为区间数 $G^I(\alpha^I, \mathbf{t})$ 或 $G^I(\alpha^I, \mathbf{t}^I)$ 。针对这两种情况, Gamma 信息先验下 PLP 模型基于区间的贝叶斯分析的关键问题就是如何计算 $G^I(\alpha^I, \mathbf{t})$ 和 $G^I(\alpha^I, \mathbf{t}^I)$ 。本文对这两种情况分别进行研究。

情况 I: 区间值信息的先验矩和精确信息的失效时间

这里 Λ_T 和 β 的先验矩 φ 是以区间数 $\varphi^I = (E_\Lambda^I, CV_\Lambda^I, E_\beta^I, CV_\beta^I)$ 形式收集的, 其中 $E_\Lambda^I = [E_\Lambda^L, E_\Lambda^U]$, $CV_\Lambda^I = [CV_\Lambda^L, CV_\Lambda^U]$, $E_\beta^I = [E_\beta^L, E_\beta^U]$, $CV_\beta^I = [CV_\beta^L, CV_\beta^U]$, L 和 U 分别代表区间数的上界和下界。由式(4)~式(7)以及区间运算法则可知, 超参数 α 是 φ^I 的区间值函数, 因此其值也是区间数 $\alpha^I = (a_\Lambda^I, b_\Lambda^I, a_\beta^I, b_\beta^I)$, 具体如下:

$$a_\Lambda^I = \left[(CV_\Lambda^U)^{-2}, (CV_\Lambda^L)^{-2} \right] \quad (14)$$

$$b_\Lambda^I = \left[(E_\Lambda^U)^{-1} (CV_\Lambda^U)^{-2}, (E_\Lambda^L)^{-1} (CV_\Lambda^L)^{-2} \right] \quad (15)$$

$$a_{\beta}^I = \left[(CV_{\beta}^U)^{-2}, (CV_{\beta}^L)^{-2} \right] \quad (16)$$

$$b_{\beta}^I = \left[(E_{\beta}^U)^{-1} (CV_{\beta}^U)^{-2}, (E_{\beta}^L)^{-1} (CV_{\beta}^L)^{-2} \right] \quad (17)$$

针对具有区间值 φ^I 和精确失效时间 $\mathbf{t} = t_{ij}$ ($i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n_i$) 的情况, 式(9)后验积分则是 α^I 的区间值函数, 其值是一个区间数, 为 $G^I(\alpha^I, \mathbf{t}) = [G^L(\alpha^I, \mathbf{t}), G^U(\alpha^I, \mathbf{t})]$, 其中 $G^L(\alpha^I, \mathbf{t})$ 和 $G^U(\alpha^I, \mathbf{t})$ 分别是式(18)所示约束优化问题中目标函数的极小值和极大值。

Case I:

$$\min(\max) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\theta, \beta) \cdot \pi(\theta, \beta | \mathbf{t}) d\theta d\beta$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} a_{\Lambda} \in a_{\Lambda}^I \\ b_{\Lambda} \in b_{\Lambda}^I \\ a_{\beta} \in a_{\beta}^I \\ b_{\beta} \in b_{\beta}^I \end{cases} \quad (18)$$

情况 II: 区间值信息的先验矩和区间值信息的失效时间

当可修系统的失效时间是以区间数 $\mathbf{t}' = (t_{ij}^I, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n_i)$, $t_{ij}^I = [t_{ij}^L, t_{ij}^U]$ 形式收集到的时候, 似然函数为

$$l(\mathbf{t}' | \theta, \beta) = \prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} [\Lambda(t_{ij}^U) - \Lambda(t_{ij}^L)] \exp[-\Lambda(T_i)] \right\} \quad (19)$$

针对先验信息和失效时间均以区间数形式收集时, Gamma信息先验下PLP模型的贝叶斯分析可以转化为情况 I 中PLP模型的贝叶斯分析, 然而直接使用式(19)似然函数与式(2)~式(3)先验开展PLP模型的传统贝叶斯分析通常会较繁琐且致使分析结果不易处理^[7]。因此, 在Gamma信息先验下使用式(19)似然函数进行PLP模型基于区间的贝叶斯分析将更复杂且难以处理。

本文不是将区间值形式的失效时间视为一个区间, 而是将其视为一个区间数。进而针对同时具有区间值 φ^I 和 \mathbf{t}' 的情形, 基于式(1)似然函数可

以较容易地得到Gamma信息先验下PLP模型基于区间的贝叶斯分析方法, 此时式(9)后验积分变为 α^I 和 \mathbf{t}' 的一个区间值函数, 其值也是一个区间数, 为 $G^I(\alpha^I, \mathbf{t}') = [G^L(\alpha^I, \mathbf{t}'), G^U(\alpha^I, \mathbf{t}')]$, 其中 $G^L(\alpha^I, \mathbf{t}')$ 和 $G^U(\alpha^I, \mathbf{t}')$ 分别是式(20)所示约束优化问题中目标函数的极小值和极大值。

Case II:

$$\min(\max) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\theta, \beta) \cdot \pi(\theta, \beta | \mathbf{t}') d\theta d\beta$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} a_{\Lambda} \in a_{\Lambda}^I \\ b_{\Lambda} \in b_{\Lambda}^I \\ a_{\beta} \in a_{\beta}^I (i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n_i) \\ b_{\beta} \in b_{\beta}^I \\ t_{ij} \in t_{ij}^I \end{cases} \quad (20)$$

为了获得 $G^I(\alpha^I, \mathbf{t})$ 和 $G^I(\alpha^I, \mathbf{t}')$ 的确切区间值, 需求解式(18)和式(20)中的约束优化问题。这些优化问题中的目标函数恰是第1节中Gamma先验下函数 $g(\theta, \beta)$ 的传统贝叶斯后验分析结果, 可由式(13)求解得到。又考虑到这些目标函数是无解析解的复杂多重积分且是高度非线性的, 本文采用协方差矩阵自适应演化策略(Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy, 简称CMA-ES)^[41-42]来搜索式(18)和式(20)中约束优化问题的全局最优解。

综上, 针对情况 I 和情况 II 所提出的PLP模型基于区间的贝叶斯分析方法, 实质上转化为求解目标函数恰是Gamma先验下PLP模型传统贝叶斯后验分析的约束优化问题。此外, 所提出的PLP模型基于区间的贝叶斯分析方法同样适用于Gamma信息先验下具有精确先验和区间值失效时间情形时PLP模型的贝叶斯分析, 进一步还可应用于先验和/或失效时间中部分信息为区间值情形时PLP模型的贝叶斯分析。针对这些不同情形下PLP模型基于区间的贝叶斯分析, 仅需求解与式(18)和式(20)中目标函数相同、约束不同的类似约束优化问题即可。各种情况下, PLP模型基于区间的贝叶斯分析方法的流程图如图1所示。

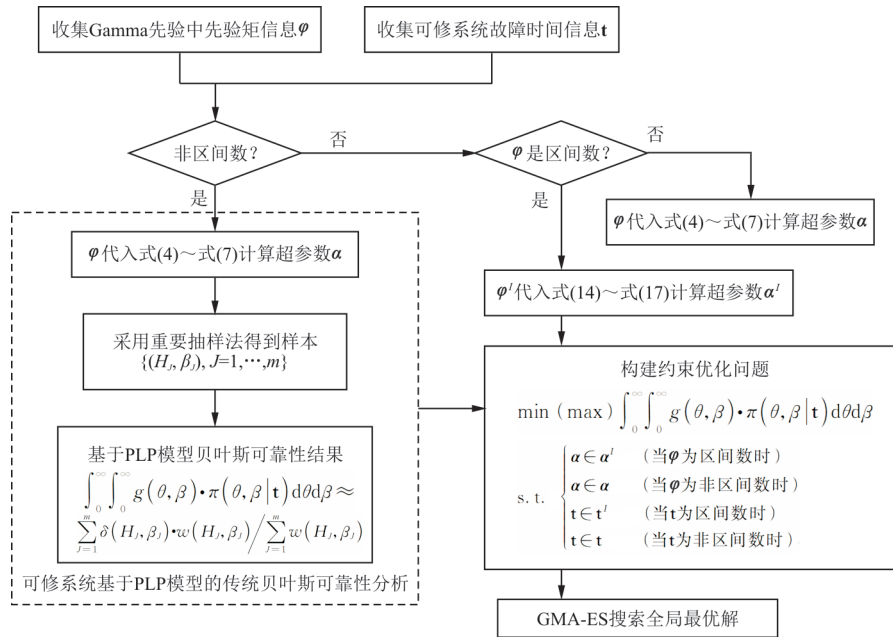


图 1 PLP模型基于区间的贝叶斯方法流程图

Fig. 1 Flowchart of interval-based Bayesian method of the power law process

退化区间数是一个由单一实数构成的区间，因此，当Gamma先验信息和失效时间都是以精确实数值形式收集时，本节所提出的PLP模型基于区间的贝叶斯分析方法将退化为第1节中Gamma信息先验下PLP模型的传统贝叶斯分析方法。

3 实例分析

以3个工程实例说明本文所提出的PLP模型基于区间的贝叶斯分析方法在单、多台可修系统可靠性分析中的应用。

3.1 实例 1

一种复合型飞机发动机在开发阶段经历了可靠性增长过程，开发测试在其发生第13次失效后终止^[5, 14, 43-44]，飞机发动机的13次失效时间如表1所示。这些失效数据是服从 $\beta < 1$ 的PLP模型，假设发动机后续的失效依然服从同一PLP模型。基于类似系统经验的专家意见可以产生以下先验信息：发动机在时间段(0, 1 000 h]内的平均失效次数服从均值为 $E'_\lambda = [8, 9]$ 和变异系数为 $CV'_\lambda = [0.22, 0.27]$ 的Gamma分布，参数 β 服从均值为 $E'_\beta = [0.55, 0.60]$ 和变异系数为 $CV'_\beta = [0.055, 0.056]$ 的Gamma分布。表1还列出了发动机在情况II下的区间值失效时间。在给定Gamma信息先验下，分析发动机当前的MTBF，并预测飞机发动机的失效情况。

表 1 柴油机的失效时间

Table 1 Failure times for an aircraft generator

失效次数 i	失效时间 t_i/h	
	情况 I	情况 II
1	55	[50, 60]
2	166	[160, 170]
3	205	[200, 210]
4	341	[340, 350]
5	488	[480, 490]
6	567	[560, 570]
7	731	[730, 740]
8	1 308	[1 300, 1 320]
9	2 050	[2 040, 2 060]
10	2 453	[2 450, 2 460]
11	3 115	[3 105, 3 030]
12	4 017	[4 010, 4 030]
13	4 596	[4 580, 4 596]

发动机在4 596时刻的MTBF为 $M(4 596) = 1/\lambda(4 596)$ ，在平方损失函数下，采用本文所提出的PLP模型基于区间的贝叶斯分析方法(取式(13)中 $m = 5 \times 10^4$)，可以得到发动机在情况I和情况II下 $M(4 596)$ 的贝叶斯估计分别为[318.321, 828.158]和[318.301, 828.374]。文献[20]中式(24)给出了发动机在未来时间段(4 596 h, 6 596 h)内发生 $r(r = 0, 1, 2, \dots)$ 次失效的预测概率为

$$P\{N(4 596, 6 596) = r | \mathbf{t}\} =$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P\{N(4\,596, 6\,596) = r | \theta, \beta\} \pi(\theta, \beta | \mathbf{t}) d\theta d\beta$$

其中:

$$P\{N(4\,596, 6\,596) = r | \theta, \beta\} = \frac{1}{r!} \left[\left(\frac{6\,596}{\theta} \right)^\beta - \left(\frac{4\,596}{\theta} \right)^\beta \right]^r \exp \left\{ - \left[\left(\frac{6\,596}{\theta} \right)^\beta - \left(\frac{4\,596}{\theta} \right)^\beta \right] \right\}$$

利用文献[20]的方法在情况 I 和情况 II 下可以分别得到发动机在时间段(4 596 h, 6 596 h]内发生 r 次失效的概率,如图 2 所示。对比两种情况下 $M(4\,596)$ 和 $P\{N(4\,596, 6\,596) = r | \mathbf{t}\}$ 的结果发现,情况 I 与情况 II 的结果非常接近。此外,结合下面区间序关系,可发现发动机在未来 2 000 h 内(即在时间段(4 596 h, 6 596 h]内)发生 2 次失效的概率最大,该概率值在情况 I 与情况 II 下分别为 [0.057 15, 0.257 3] 和 [0.057 52, 0.257 1]。基于发动机当前 MTBF $M(4\,596)$ 的值,同样可以预知它在(4 596 h, 6 596 h]内将会发生两次失效的可能性较大,这与 $P\{N(4\,596, 6\,596) = r | \mathbf{t}\}$ 的预测分布结果一致。

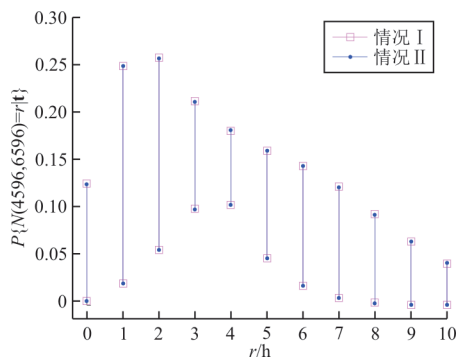


图 2 $N(4\,596, 6\,596)$ 的预测分布

Fig. 2 Prediction distribution of $N(4\,596, 6\,596)$

区间序列关系:

令 $A^l = [A^L, A^U]$, ($A^L \leq A^U$) 是一个实值区间数,则区间数 A^l 的中点 $I_m(A^l)$ 和半径 $I_w(A^l)$ 分别为 $I_m(A^l) = \frac{1}{2}(A^L + A^U)$, $I_w(A^l) = \frac{1}{2}(A^U - A^L)$ 。 $B^l = [B^L, B^U]$, ($B^L \leq B^U$) 是另一实值区间数。如果 $A^L = B^L$ 且 $A^U = B^U$, 则 $A^l = B^l$ 。R. E. Moore 等^[25]给出了区间序关系“ $<$ ”的定义,当 $A^U < B^L$ 时, $A^l < B^l$ 。该关系有可传递性,即 $A^l < B^l$ 且 $B^l < C^l$, 则 $A^l < C^l$ 。但是此序关系并不适用于相互重叠的区间数。H. Ishibuchi 等^[45]和 S. Karmakar 等^[46]所

提方法可以较显著地排序两个区间数, A^l 和 B^l 中的最大者由区间序“ \leq_{LR} ”定义,若 $A^L \leq B^L$ 且 $A^U \leq B^U$, 则 $A^l \leq_{LR} B^l$; 若 $A^L \leq_{LR} B^L$ 且 $A^U \neq B^U$, 则 $A^l <_{LR} B^l$ 。如果区间序关系“ \leq_{LR} ”也不适用,给出另一区间序关系“ \leq_{CW} ”^[45-46]定义,若 $I_m(A^l) \leq I_m(B^l)$ 且 $I_w(A^l) \geq I_w(B^l)$, 则 $A^l \leq_{CW} B^l$; 若 $A^l \leq_{CW} B^l$ 且 $A^l \neq B^l$, 则 $A^l <_{CW} B^l$ 。区间序关系“ \leq_{LR} ”和“ \leq_{CW} ”都具有自反性、反对称性和传递性。

3.2 实例 2

虎鲸号潜艇 3 号主推进柴油机计划外维护的前 30 次失效时间^[14,47]如表 2 所示,假设它们是在柴油机第 30 次失效时采取失效截尾方式获得的(全部数据包含 56 次失效时间^[47]),这些失效数据显示柴油机系统的可靠性呈现出下降趋势。该实例中,柴油机在初始测试中的失效以及在第 30 次失效以后的未来失效均是服从 $\beta > 1$ 的同一 PLP 模型。针对情况 I,柴油机在时间段(0, 10 000 h]内平均失效次数的可信先验是均值为 $E'_\lambda = [30, 31]$ 和变异系数为 $CV'_\lambda = [0.25, 0.30]$ 的 Gamma 分布,参数 β 的可信先验是均值为 $E'_\beta = [1.2, 1.3]$ 和变异系数为 $CV'_\beta = [0.050, 0.055]$ 的 Gamma 分布。针对情况 II,先验信息同情况 I,柴油机的部分失效时间是以区间数形式收集的,如表 2 所示。

表 2 柴油机的失效时间^[14,47]
Table 2 Failure times (hours) for a diesel engine^[14,47]

失效次数 i	失效时间 t_i / h		失效次数 i	失效时间 t_i / h
	情况 I	情况 II		情况 I / II
1	860	[840, 880]	16	4 456
2	1 258	[1 240, 1 280]	17	4 517
3	1 317	[1 300, 1 340]	18	4 899
4	1 422	[1 400, 1 440]	19	4 910
5	1 897	[1 880, 1 920]	20	5 676
6	2 011	[2 000, 2 040]	21	5 755
7	2 122	[2 100, 2 140]	22	6 137
8	2 439	[2 420, 2 465]	23	6 211
9	3 203	[3 180, 3 225]	24	6 311
10	3 298	[3 280, 3 330]	25	6 613
11	3 902	[3 850, 3 902]	26	6 975
12	3 910	[3 910, 3 950]	27	7 335
13	4 000	[3 980, 4 080]	28	8 158
14	4 247	[4 200, 4 300]	29	8 498
15	4 411	[4 380, 4 430]	30	8 690

在给定 Gamma 信息先验下,预测所观测柴油机在第 30 次失效后某时间段 $(t_{30}, t_{30} + d]$ 内的系统可靠度 $R(d)$, 以及预测所观测柴油机在 t_{30} 截尾时间后第 31 次失效时间的分布。

系统可靠度定义为在某一时间段内不发生失效的概率。在第 30 次失效截尾后时间段 $(t_{30}, t_{30} + d]$ 内的系统可靠度 $R(d)$ 可由文献[20]中式(14)给出, 即:

$$R(d) = P\left\{N(t_{30}, t_{30} + d) = 0 \mid \theta, \beta\right\} = \exp\left\{-\left[\left(\frac{t_{30} + d}{\theta}\right)^\beta - \left(\frac{t_{30}}{\theta}\right)^\beta\right]\right\}$$

$R(d)$ 的后验均值为

$$E[R(d) \mid \mathbf{t}] = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left\{-\left[\left(\frac{t_{30} + d}{\theta}\right)^\beta - \left(\frac{t_{30}}{\theta}\right)^\beta\right]\right\} \cdot \pi(\theta, \beta \mid \mathbf{t}) d\theta d\beta$$

由文献[20]中式(29)可得柴油机第 31 次失效时间 t_{31} 的预测分布为

$$P\{t_{31} \leq t \mid \mathbf{t}\} = E_{\theta, \beta \mid \mathbf{t}}\left[F\left(\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta - \left(\frac{t_{30}}{\theta}\right)^\beta; 1, 1\right)\right] = E_{\theta, \beta \mid \mathbf{t}}\left[1 - \exp\left\{-\left[\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta - \left(\frac{t_{30}}{\theta}\right)^\beta\right]\right\}\right] \quad (t \geq t_{30})$$

式中: $F(\cdot; a, b)$ 为参数为 a 和 b 的 Gamma 分布的累积分布函数。

事实上, t_{31} 的预测分布和系统可靠度之间存在关系 $P\{t_{31} \leq t \mid \mathbf{t}\} = 1 - E[R(t - t_{30}) \mid \mathbf{t}]$ 。

取式(13)中 $m = 5 \times 10^4$, 采用 PLP 模型基于区间的贝叶斯分析方法, 可在情况 I 和情况 II 下分别得到贝叶斯后验均值 $E[R(d) \mid \mathbf{t}]$ (一个区间数)。给定多个时间 d 值, 情况 I 和情况 II 下的区间值 $E[R(d) \mid \mathbf{t}]$ 如图 3 所示, 可以看出: 情况 I 中的 $E[R(d) \mid \mathbf{t}]$ 值与情况 II 中的值非常接近。

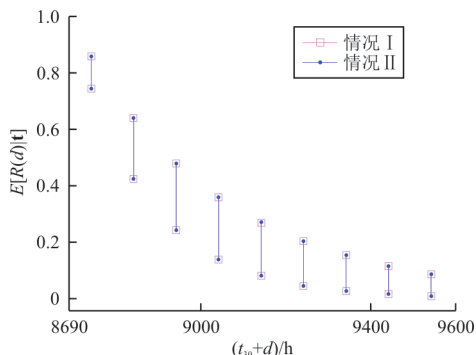


图 3 $R(d)$ 的贝叶斯估计

Fig. 3 Bayesian estimation of $R(d)$

从图 3 可以看出: 当 $d = 352$ h 时, 柴油机在时间段 (8 690 h, 9 042 h] 内系统可靠度 $R(d)$ 的贝叶斯后验均值 (图 3 中左起第四条线段) 在情况 I 下为 [0.139 8, 0.359 4], 在情况 II 下为 [0.139 7, 0.359 5]。此外, 柴油机的系统可靠度 $R(d)$ 的贝叶斯后验均值将随着时间 d 的增加呈现降低 (由于所有区间值 $E[R(d) \mid \mathbf{t}]$ 满足区间序关系 “ \leq_{LR} ”) 的趋势, 该趋势同样适用于图中每一个区间数 $E[R(d) \mid \mathbf{t}]$ 的上下限。 $P\{t_{31} \leq 9 042 \mid \mathbf{t}\} = 1 - E[R(352) \mid \mathbf{t}]$, 由区间算术运算可知, $P\{t_{31} \leq 9 042 \mid \mathbf{t}\}$ 在情况 I 下的贝叶斯预测概率为 [0.640 6, 0.860 2], 在情况 II 下的贝叶斯预测概率为 [0.640 5, 0.860 3]。由于 $P\{t_{31} \leq t \mid \mathbf{t}\} = 1 - E[R(t - t_{30}) \mid \mathbf{t}]$, 柴油机第 31 次失效时间的贝叶斯预测概率 $P\{t_{31} \leq t \mid \mathbf{t}\}$ 将随着时间 t 的增加呈现增长趋势。因此, $E[R(d) \mid \mathbf{t}]$ 和 $P\{t_{31} \leq t_{30} + d \mid \mathbf{t}\}$ 的贝叶斯预测结果均显示柴油机的第 31 次失效发生在 $d \geq 352$ 的 $t_{30} + d$ 时刻的高可能性。柴油机的第 31 次失效实际发生在第 9 042 h^[47], 这也证实了上述贝叶斯预测分析结果与虎鲸主推进柴油机实际失效数据是一致的。

3.3 实例 3

为了提升一种新型汽车发动机原型机的可靠性进行一项开发计划, 如果该系统设计满足给定可靠性目标, 则所得系统设计可用于大规模生产。在当前测试阶段, 有 3 台同配置的新发动机投入测试, 3 台发动机的测试时间分别为 1 000, 1 500 和 1 500 h。发动机的可靠度以其在时间段 $(0, \tau]$ 内的平均失效次数 $\Lambda(\tau)$ 来衡量, 当 $\Lambda(1 000)$ 不超过 6 次的预测概率至少等于 0.90 时, 即 $P\{\Lambda(1 000) \leq 6 \mid \mathbf{t}\} \geq 0.90$, 可靠度目标达到。假定每台发动机的失效过程是服从参数为 θ 和 β 的 PLP 模型, 则 $\Lambda(\tau) = r (r = 0, 1, 2, \dots)$ 的贝叶斯预测概率^[20]为

$$P\{\Lambda(\tau) = r \mid \mathbf{t}\} =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{r!} \left[\left(\frac{\tau}{\theta}\right)^\beta\right]^r \exp\left\{-\left(\frac{\tau}{\theta}\right)^\beta\right\} \cdot \pi(\theta, \beta \mid \mathbf{t}) d\theta d\beta$$

$\Lambda(\tau) \leq 6$ 的贝叶斯预测概率为

$$P\{\Lambda(\tau) \leq 6 | \mathbf{t}\} = \sum_{r=0}^6 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{r!} \left[\left(\frac{\tau}{\theta} \right)^{\beta} \right]^r \exp \left\{ - \left(\frac{\tau}{\theta} \right)^{\beta} \right\} \cdot \pi(\theta, \beta | \mathbf{t}) d\theta d\beta$$

对该型发动机在当前测试阶段的系统可靠度进行贝叶斯预测分析。

汽车发动机在开发过程中的更新信息可以产生以下先验信息:发动机在时间段(0, 1 000 h)内的平均失效次数服从均值为 $E_{\lambda}^I = [2.3, 2.6]$ 和变异系数为 $CV_{\lambda}^I = [0.22, 0.27]$ 的 Gamma 分布, 参数 β 服从均值为 $E_{\beta}^I = [1.74, 1.76]$ 和变异系数为 $CV_{\beta}^I = [0.055, 0.056]$ 的 Gamma 分布。3 台发动机的确切失效时间^[48]和区间值失效时间如表 3 所示。

表 3 3 台发动机的失效时间
Table 3 Failure times for three copies

发动机 1		发动机 2		发动机 3	
情况 I	情况 II	情况 I	情况 II	情况 I	情况 II
645	[600, 690]	390	[350, 430]	240	[200, 280]
813	[770, 860]	698	[650, 750]	1055	[1 000, 1 100]
958	[900, 980]	1 004	[960, 1 050]	1 388	[1 330, 1 430]
—	—	1 153	[1 100, 1 190]	—	—
—	—	1 228	[1 200, 1 280]	—	—

单位:h

取式(13)中 $m = 5 \times 10^4$, 采用 PLP 模型基于区间的贝叶斯分析方法, $\Lambda(1 000)$ 在情况 I 和情况 II 下的贝叶斯预测分布如图 4 所示, 可以看出: 情况 I 与情况 II 下 $\Lambda(1 000)$ 的预测分布非常接近。

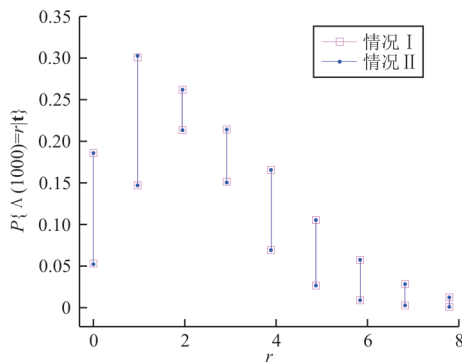


图 4 $\Lambda(1 000)$ 的预测分布

Fig. 4 Prediction distribution of $\Lambda(1 000)$

$P\{\Lambda(1 000) \leq 6 | \mathbf{t}\}$ 在情况 I 下的贝叶斯预测概率是 $[0.954 8, 0.996 7]$, 在情况 II 下的预测概率是 $[0.953 2, 0.996 8]$, 这两个结果非常接近, 都超过了预定概率水平 0.90, 也即在情况 I 和情况 II 下都达到了可靠度目标。因此, 当前系统设计下的发动机足以可靠地被接受用于大规模生产, 并且发动机的开发计划可以停止。

综上, 对比三个实例在情况 I 和情况 II 下的贝叶斯分析结果发现, 区间值先验信息对 Gamma 信息先验下 PLP 模型基于区间的贝叶斯后验分析结果所产生的影响远大于可修系统的区间值失效时间所产生的影响。因此, 为了得到可修系统更精确的贝叶斯可靠性分析结果, 应尽可能更精确地收集先验信息。此外, 可以预测 Gamma 信息先验下当仅有可修系统的失效时间是区间值时 PLP 模型的贝叶斯分析结果将会接近于同先验下 PLP 模型的传统贝叶斯分析结果。

4 结 论

(1) 本文所提出的 PLP 模型基于区间的贝叶斯方法, 不仅可以应用于当先验信息和/或可修系统的失效时间为区间值信息时 Gamma 信息先验下 PLP 模型的贝叶斯分析, 还可以应用于先验和/或可修系统的失效时间中部分信息为区间值时 Gamma 信息先验下 PLP 模型的贝叶斯分析。

(2) 当 Gamma 先验信息和可修系统的失效时间信息以精确数据(即实数值)形式获得时, PLP 模型基于区间的贝叶斯方法将退化为 Gamma 信息先验下 PLP 模型的传统贝叶斯方法, Gamma 信息先验下 PLP 模型基于区间的贝叶斯分析方法实质上是 Gamma 先验分布下 PLP 模型传统贝叶斯方法的延伸。

(3) PLP 模型基于区间的贝叶斯方法是在 Gamma 信息先验下研究的, 本文处理方法同样适用于 PLP 模型参数取自然共轭先验、准共轭先验等其他信息先验下基于区间的贝叶斯分析。

此外, 本文考虑的是信息先验中的先验信息、可修系统的故障时间以区间值不确定性形式收集的情形, 若这些信息是以模糊信息形式收集, 本文方法还适用于以水平截集概念来研究可修系统基于 PLP 模型的模糊贝叶斯方法。因此, 针对小子样情形不确定性因素影响下航空航天等领域中可

修系统的可靠性评估问题,本文所提出的方法为其研究提供一种值得参考的方法。

参考文献

- [1] CROW L H. Reliability analysis for complex, repairable systems[EB/OL]. [2021-12-08]. <https://www.docin.com/p-1520507744.html>.
- [2] 梅文华. 可靠性增长试验[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.
MEI Wenhua. Reliability growth test[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003. (in Chinese)
- [3] Department of Defense. Reliability growth management: MIL-HDBK-189[S]. USA: Department of Defense, 1981.
- [4] GUIDA M, CALABRIA R, PULCINI G. Bayes inference for a non-homogeneous Poisson process with power intensity law[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1989, 38(5): 603-609.
- [5] BAR-LEV S K, LAVI I, REISER B. Bayesian inference for the power law process[J]. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1992, 44(4): 623-639.
- [6] SEN A, KHATTREE R. On estimating the current intensity of failure for the power-law process[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1998, 74(2): 253-272.
- [7] SEN A. Bayesian estimation and prediction of the intensity of the power law process[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2002, 72(8): 613-631.
- [8] YU J W, TIAN G L, TANG M L. Predictive analyses for nonhomogeneous Poisson processes with power law using Bayesian approach [J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2007, 51(9): 4254-4268.
- [9] 王燕萍, 吕震宙, 赵新攀. 基于 Markov Chain Monte Carlo 的幂律过程的 Bayesian 分析[J]. 航空动力学报, 2010, 25(1): 152-159.
WANG Yanping, LYU Zhenzhou, ZHAO Xinpan. Bayesian analysis for the power law process based on Markov Chain Monte Carlo[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(1): 152-159. (in Chinese)
- [10] 王燕萍, 吕震宙. 基于 G-M 法和重要抽样法的 PLP 强度函数 Bayesian 预测分析 [J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(11): 2217-2224.
WANG Yanping, LYU Zhenzhou. Bayesian prediction analysis of the intensity of the power law process based on G-M method and importance sampling technique[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2011, 31(11): 2217-2224. (in Chinese)
- [11] TIAN G L, TANG M L, YU J W. Bayesian estimation and prediction for the power law process with left-truncated data[J]. Journal of Data Science, 2011, 9(3): 445-470.
- [12] OLIVEIRA M D D, COLOSIMO E A, GILARDONI G L. Bayesian inference for power law processes with applications in repairable systems[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2012, 142(5): 1151-1160.
- [13] AMINZADEH M S. Bayesian estimation of the expected time of first arrival past a truncated time T: the case of NHPP with power law intensity[J]. Computational Statistics, 2013, 28(6): 2465-2477.
- [14] BEISER J A, RIGDON S E. Bayes prediction for the number of failures of a repairable system[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1997, 46(2): 291-295.
- [15] KUO L, YANG T Y. Bayesian computation of software reliability[J]. Journal of the American Statistical Association, 1996, 91: 763-773.
- [16] CALABRIA R, PULCINI G. Maximum likelihood and Bayes prediction of current system lifetime[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 1996, 25(10): 2297-2309.
- [17] KYPARISIS J, SINGPURWALLA N D. Bayesian inference for the Weibull process with applications to assessing software reliability growth and predicting software failures [C]// Proceeding of the 16th Symposium on the Interface. [S.l.]: IEEE, 1985: 57-64.
- [18] YAN Z Q, LI X X, XIE H W, et al. Bayesian synthetic evaluation of multistage reliability growth with instant and delayed fix modes [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2008, 19(6): 1287-1294.
- [19] 李欣欣, 闫志强, 谢红卫. 基于 Weibull 过程的可靠性增长试验 Bayes 分析[J]. 兵工自动化, 2007, 26(11): 30-31.
LI Xinxin, YAN Zhiqiang, XIE Hongwei. Bayesian analysis of reliability growth test based on Weibull process [J]. Ordnance Industry Automation, 2007, 26(11): 30-31. (in Chinese)
- [20] WANG Y P, LYU Z Z. Bayesian inference and prediction analysis of the power law process based on a Gamma prior distribution [J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 2011, 40(9): 1383-1401.
- [21] GIORGIO M, GUIDA M, PULCINI G. Repairable system analysis in presence of covariates and random effects[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2014, 131: 271-281.
- [22] HUANG Y S, BIER V M. A natural conjugate prior for the nonhomogeneous poisson process with an exponential intensity function [J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 1999, 28(6): 1479-1509.
- [23] KIM T S, PARK C S, AHN S E. Determining the optimal maintenance action for a deteriorating repairable system[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2008, 23(1): 95-101.
- [24] GUIDA M, PULCINI G. Bayesian reliability assessment of repairable systems during multi-stage development programs [J]. IIE Transactions, 2005, 37(11): 1071-1081.
- [25] MOORE R E, KEARFOTT R B, CLOUD M J. Introduction to interval analysis[M]. US: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.
- [26] 孙荣荣, 杨宏伟, 黄晓明. 外场数据下航空产品寿命统计方法研究[J]. 机械设计与制造, 2021(12): 297-300,304.
SONG Rongrong, YANG Hongwei, HUANG Xiaoming. Research on life statistics method of aviation products under outfield data [J]. Machinery Design & Manufacture, 2021

- (12): 297-300, 304. (in Chinese)
- [27] 田国梁. Duane模型、分组数据的AMSAA模型和具有失数据的AMSAA模型——Bayes分析方法[J]. 系统工程与电子技术, 1991(7): 46-53.
TIAN Guoliang. Duane model and the AMSAA models with grouping data and with missing data: a Bayesian analysis approach[J]. Systems Engineering and Electronics, 1991(7): 46-53. (in Chinese)
- [28] 刘忠, 茆诗松. 分组数据的Bayes分析——Gibbs抽样方法[J]. 应用概率统计, 2003, 13(2): 211-216.
LIU Zhong, MAO Shisong. Bayes analysis for grouped data—Gibbs sampling method[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2003, 13(2): 211-216. (in Chinese)
- [29] SPINATO F, TAVNER P J. Reliability-growth analysis of wind turbines from fleet field data[C]// 2007 ARTS Conference. UK: [s. n.], 2007: 1-5.
- [30] SMITH A F M, GELFAND A E. Bayesian statistics without tears: a sampling-resampling perspective [J]. The American Statistician, 1992, 46(2): 84-88.
- [31] GILKS W R, WILD P. Adaptive rejection sampling for gibbs sampling[J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1992, 41(2): 337-348.
- [32] 王燕萍, 吕震宙. 一种基于Gibbs抽样的可靠性增长Bayes方法[J]. 西北工业大学学报, 2007, 25(6): 784-788.
WANG Yanping, LYU Zhenzhou. Bayesian approach to reliability growth based on the Gibbs sampling[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2007, 25(6): 784-788. (in Chinese)
- [33] 郑玉巧, 魏剑峰, 董付刚, 等. 基于幂律过程的风力机故障建模方法研究[J]. 太阳能学报, 2022, 43(1): 52-57.
ZHENG Yuqiao, WEI Jianfeng, DONG Fugang, et al. Research on fault modeling method of wind turbine based on power law process[J]. Acta Energetica Solaris Sinica, 2022, 43(1): 52-57. (in Chinese)
- [34] WANG Y P, LU Z Z, ZHAO X P. Bayesian analysis for the power law process based on Markov chain Monte Carlo [J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(1): 152-159.
- [35] RIGDON S E, BASU A P. Statistical methods for the reliability of repairable systems[M]. New York: Wiley, 2000.
- [36] RIGDON S E, BASU A P. Estimating the intensity function of a power law process at the current time: time truncated case [J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 1990, 19(3): 1079-1104.
- [37] QIAO H Z, TSOKOS C P. Best efficient estimates of the intensity function of the power law process[J]. Journal of Applied Statistics, 1998, 25(1): 111-120.
- [38] RUGGERI F. On the reliability of repairable systems: methods and applications[M]// DI BUCCHIANICO A, MATTHEI R M M, PELETIER M A. Progress in industrial mathematics at ECMI 2004. HeidelbergBerlin: Springer Berlin Heidelberg, 2006: 535-553.
- [39] AL-TURK L I. Testing the performance of the power law process model considering the use of regression estimation approach [J]. International Journal of Software Engineering & Applications, 2014, 5(5): 35-46.
- [40] CHEN M H, SHAO Q M. Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals[J]. Journal of Computational and Graphical Statistics, 1999, 8(1): 69-92.
- [41] HANSEN N, OSTERMEIER A. Adapting arbitrary normal mutation distributions in evolution strategies: the covariance matrix adaptation[C]// 1996 IEEE International Conference on Evolutionary Computation. [S. l.]: IEEE, 1996: 1-12.
- [42] DIOUANE Y, GRATTON S, VICENTE L N. Globally convergent evolution strategies[J]. Mathematical Programming, 2015, 152(1): 467-490.
- [43] DUANE J T. Learning curve approach to reliability monitoring [J]. IEEE Transactions on Aerospace, 1964, 2(2): 563-566.
- [44] CHUMNAUL J, SEPEHRIFAR M. Generalized confidence interval for the scale parameter of the power-law process with incomplete failure data [J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2018, 128: 17-33.
- [45] ISHIBUCHI H, TANAKA H. Multiobjective programming in optimization of the interval objective function [J]. European Journal of Operational Research, 1990, 48(2): 219-225.
- [46] KARMAKAR S, BHUNIA A K. A comparative study of different order relations of intervals [J]. Reliable Computing, 2012(16): 38-72.
- [47] PHILLIPS M J. Bootstrap confidence regions for the expected ROCOF of a repairable system [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2000, 49(2): 204-208.
- [48] CALABRIA R, GUIDA M, PULCINI G. A reliability-growth model in a Bayes-decision framework [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1996, 45(3): 505-510.

作者简介:

王燕萍(1981—),女,博士,副教授。主要研究方向:飞行器可靠性工程。

魏宇鹏(2001—),男,硕士研究生。主要研究方向:飞行器可靠性工程。

吕震宙(1966—),女,博士,教授。主要研究方向:飞行器可靠性工程,航空航天安全工程。

(编辑:丛艳娟)