

文章编号: 1674-8190(2024)01-079-10

基于失效概率的涡轮后机匣全局灵敏度分析

邱昊源, 李洪双

(南京航空航天大学 飞行器先进设计技术国防重点学科实验室, 南京 210016)

摘要: 涡轮后机匣作为航空发动机安全的关键部件, 具有工况复杂、不确定性因素多的缺点。为了探究输入随机变量的不确定性对涡轮后机匣结构失效概率的影响, 建立参数化有限元模型进行确定性分析。考虑材料性能、几何参数及外部载荷的不确定性, 对涡轮后机匣两种典型失效模式建立极限状态函数; 通过构造自适应Kriging代理模型并结合重要抽样方法评估涡轮后机匣结构失效概率, 利用基于失效概率的全局灵敏度方法对涡轮后机匣结构可靠度的不确定性来源进行分析, 对各输入随机变量重要性进行排序, 构建一种涡轮后机匣全局灵敏度分析框架。结果表明: 涡轮后机匣在两种失效模式以及系统失效模式下, 发动机推力以及线性膨胀系数对结构失效概率影响最为显著, 应对其重点考虑; 内外机匣长度以及材料弹性模量对涡轮后机匣结构失效概率影响较小, 可对其适当忽略。

关键词: 涡轮后机匣; 全局灵敏度分析; 自适应Kriging; 重要抽样; 马尔科夫链

中图分类号: V232

文献标识码: A

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.2024.01.09

Global sensitivity analysis of turbine rear casing based on failure probability

DI Haoyuan, LI Hongshuang

(National Defense Key Laboratory of Aircraft Advanced Design Technology, Nanjing
University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The aero-engine turbine rear casing is a key component for aero-engine safety, but it has complex working conditions and multiple uncertain factors. In order to explore the influence of the uncertainty of input random variables on the failure probability of a turbine rear casing structure, a parametric finite element model is established for the deterministic analysis of the aero-engine intermediate casing. Considering the uncertainty of material properties, geometric parameters and external loads of the aero-engine intermediate casing, the limit state functions are constructed for the two most typical failure modes: static strength and stiffness failures. By constructing an adaptive Kriging surrogate model and combining importance sampling method, the failure probability of the casing structure is predicted. The uncertainty source of the reliability of the turbine rear casing structure is analyzed by a global sensitivity analysis method based on failure probability. The importance order of all input random variables is identified, and a global sensitivity analysis framework for aero-engine turbine rear casing is proposed. The results show that, under the two failure modes and system failure modes, the engine thrust and linear expansion coefficient have the most significant influence on the structural failure probability, which should be considered emphatically. The length of inner and outer casing and the elastic modulus of the material have little influence on the structural failure probability of the turbine rear casing, which could be ignored.

Key words: turbine rear casing; global sensitivity analysis; adaptive Kriging; importance sampling; Markov chain

收稿日期: 2022-11-09; 修回日期: 2023-01-21

通信作者: 李洪双(1978-), 男, 博士, 教授。E-mail: hongshuangli@nuaa.edu.cn

引用格式: 邱昊源, 李洪双. 基于失效概率的涡轮后机匣全局灵敏度分析[J]. 航空工程进展, 2024, 15(1): 79-88, 96.

DI Haoyuan, LI Hongshuang. Global sensitivity analysis of turbine rear casing based on failure probability[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2024, 15(1): 79-88, 96. (in Chinese)

0 引言

涡轮后机匣位于低压涡轮后,与尾锥及内涵喷管相连接,是航空发动机重要承力部件,其结构复杂,输入参数种类较多,存在多种失效模式^[1]。传统工程设计通常基于安全系数法^[2],将涡轮后机匣视作理想结构进行静刚度与静强度分析。然而涡轮后机匣输入参数的不确定性会使得结构响应值有明显的随机性^[3],并可能导致涡轮后机匣具有较高的失效风险。航空发动机涡轮后机匣的不确定性分析具有多输入随机变量、隐式极限状态函数、小结构失效概率以及输入随机变量对失效概率影响程度高的特点。因此,对涡轮后机匣进行结构可靠性分析以及全局灵敏度分析是必要的。结构可靠性分析通过数值计算评估结构各失效模式、系统整体的失效概率以及结构可靠度信息。全局灵敏度分析可以通过计算灵敏度指标来表征输入随机变量的不确定性对输出响应值的影响,实现对输出变量不确定性来源的量化研究。

实际工程中结构可靠性分析方法种类繁多,传统可靠性分析方法如一次可靠度法(FORM)^[4]、二次可靠度法(SORM)^[5]、直接蒙特卡洛(Monte Carlo Simulation,简称MCS)法等虽然应用广泛,但在求解非线性问题时计算结果不理想,并且计算时所需样本较多从而导致计算效率低下。

针对上述问题,Kriging代理模型结合重要抽样(Importance Sampling,简称IS)法求解结构失效概率是一种有效方法。Kriging代理模型是一种无偏估计模型^[6],对非线性程度较高的极限状态函数可以实现精确拟合。除此之外,Kriging代理模型可以实现全局代理,预测定义域内的样本响应值以及局部方差,并对局部不确定性进行表征。Echard等^[7]提出了U学习函数,通过对原始Kriging模型进行加点训练,实现了Kriging模型的自适应学习,提高了拟合精度以及拟合效率;Yun W等^[8]在文献[7]的基础上将对失效概率的贡献作为一种加点准则,利用小样本实现了自适应Kriging模型的构造;Wang Z等^[9]提出了基于错误率的Co-Kriging可靠性分析方法,提高了抽样的效率;石岩等^[10]对Kriging模型进行了改进,提出了一种新的学习函数,推导了针对动力可靠度的解析表达式。重要抽样(IS)^[11]方法是一种改进的蒙特卡洛模拟方法,通过建立重要抽样概率密度函数并

以最可能点(Most Probable Point,简称MPP)作为抽样中心进行抽样,使所抽取的样本点尽可能地落入“重要区域”。利用IS方法求解失效概率可以在保证求解精度的同时提高求解效率。员婉莹等^[12]将代理模型与重要抽样的单层分析法相结合,建立了分布参数重要概率密度函数,极大地提高了失效概率以及全局灵敏度求解效率。

灵敏度分析由局部灵敏度分析^[13]以及全局灵敏度分析^[14]两部分组成。全局灵敏度分析能够把输入随机变量在定义域内对输出响应值的影响程度进行量化表示,从而获取各输入随机变量的重要程度。在输入随机变量的全部范围内量化表现对输出响应值的影响程度,从而将输入随机变量的不确定性与输出响应的不确定性相关联。Iman等^[15]提出了三种GSA指标,并利用三种指标分析结构模型中输入随机变量的重要性;Saltelli^[16]以全局性与通用性为基准,提出了两种基于方差的灵敏度指标;Borgonovo^[17]提出了基于概率密度函数的全局灵敏度分析方法,通过计算输入变量全域取值对输出响应值概率密度函数的影响来描述全局灵敏度指标,具有转换不变性^[18]。基于失效概率的全局灵敏度分析是全局灵敏度分析方法的一种,最早由Cui L J等^[19]提出,其通过计算输入随机变量在定义域内变化时无条件失效概率与条件失效概率之间的差异来衡量全局灵敏度。对于涡轮后机匣而言,研究输入变量对结构失效概率的影响程度,能够为其可靠性设计提供更加直接有用的信息。Wei P等^[20]利用数学变换将失效概率灵敏度指标进行了优化,在形式上将其与方差灵敏度指标进行了统一,简化了全局灵敏度指标评价标准。全局灵敏度分析在工程领域应用广泛,张屹尚等^[21]基于结构失效概率,利用状态依存参数(State Dependent Parameter,简称SDP)方法^[22]求解了航空发动机涡轮盘全局灵敏度指标,对涡轮盘的输入随机变量的重要性进行了分析与排序;张航等^[23]将支持向量机与MCS方法相结合,提出了全局灵敏度分析的支持向量机方法,该方法能够高效地解决工程中非线性以及隐式极限状态函数问题;Guo Q等^[24]基于矩独立灵敏度指标,对多跨管道共振可靠性进行全局灵敏度分析,为管道优化设计提供了指导。

对涡轮后机匣进行全局灵敏度分析可以有效地实现发动机整机的优化,但目前国内外鲜有针

对涡轮后机匣的全局灵敏度分析,对于航空发动机灵敏度分析大多是关于发动机转子^[25]、连接装置^[26]以及轴承^[27],尚未有研究者对涡轮后机匣全局灵敏度进行相关研究与分析。本文以某型涡轮风扇发动机涡轮后机匣为研究对象,对其进行基于有限元建模的确定性分析,明确涡轮机匣的强度与刚度水平;根据确定性分析结果明确涡轮后机匣的典型失效模式,选取重要参数作为输入随机变量,利用自适应 Kriging(Adaptive Kriging,简称 AK)模型对结构极限状态函数进行拟合,并结合 IS 方法对涡轮后机匣进行结构可靠性分析,评估结构失效概率;通过马尔科夫链(Markov Chain,简称 MC)求解条件失效概率,利用 IS-MC 方法结合涡轮后机匣结构失效概率进行全局灵敏度分析,求解全局灵敏度指标,确定各失效模式下输入变量的重要性次序,从而建立一种航空发动机涡轮后机匣的全局灵敏度分析框架,以期优化涡轮后机匣结构模型提供支撑。

1 涡轮后机匣结构可靠性分析

1.1 涡轮后机匣确定性分析

某涡轮后机匣结构主要由内机匣、外机匣、承力支板三个核心部件组成,涡轮后机匣的结构如图 1 所示。

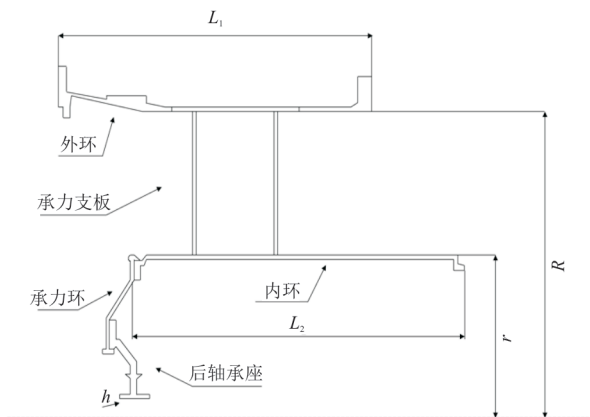


图 1 涡轮后机匣结构

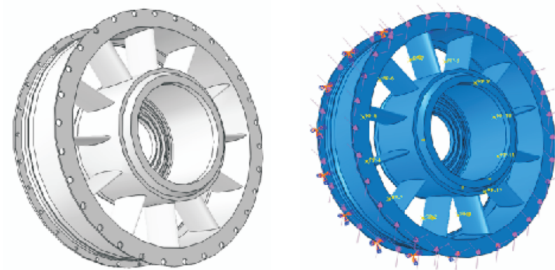
Fig. 1 Structure of turbine rear casing

本文利用有限元分析软件 Abaqus 对该涡轮后机匣结构进行简化与有限元建模。根据《航空发动机设计用材料手册》^[28]选取涡轮后机匣的材料为 K4169,其在工作温度 500 °C 下的具体参数如表 1 所示。

表 1 K4169 材料参数
Table 1 Material parameter of K4169

参数	数值	参数	数值
密度/(g·cm ⁻³)	8.22	许用应力/MPa	620
弹性模量/MPa	159 000	线性膨胀系数/(10 ⁻⁶ °C ⁻¹)	15.2

涡轮后机匣结构复杂,详细建模会导致计算效率低下,故对机匣结构做如下简化:内外机匣简化为均匀薄壁圆筒结构,采用节点耦合方法对法兰结构进行等效替代,利用 Tie 约束等效模拟承力支板与内外机匣的焊接接触,将机匣各边倒角等对计算结果影响较小的部分进行省略处理。为使计算结果直观,建立柱坐标系(如图 2 所示)。涡轮后机匣载荷、约束以及边界条件的设置如下:在内机匣表面耦合有一节点施加转子轴承传递给内机匣的发动机推力,推力值为 150 kN;在外机匣各安装节处施加全约束;建立温度—位移耦合分析步,在内机匣与转子连接处施加 500 °C 温度边界条件;对外机匣与承力支板、承力支板与内机匣之间施加 Tie 约束以模拟焊接接触。



(a) 涡轮后机匣简化模型

(b) 涡轮后机匣边界条件

图 2 某涡轮后机匣有限元模型

Fig. 2 Finite element model of a turbine rear casing

对有限元模型进行静力学分析,得到涡轮后机匣的等效应力以及位移云图如图 3 所示。对于该涡轮后机匣,其最大 Mises 等效应力出现在一支板与外机匣接触的位置,涡轮后机匣最大应力为 441.4 MPa,小于 K4169 材料在 500 °C 下的屈服强度 620 MPa,符合确定性强度设计要求。同时涡轮后机匣的最大等效位移出现在内机匣与转子耦合的节点,最大等效位移为 0.016 mm,根据工程经验以及设计手册^[3],假设最大等效位移不超过 0.03 mm,该涡轮后机匣符合确定性刚度设计需求。

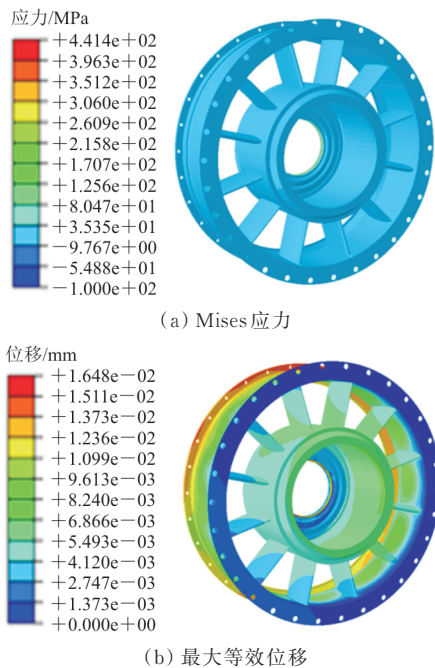


图3 某涡轮后机匣有限元计算结果
Fig. 3 Finite element calculation results of a turbine rear casing

1.2 涡轮后机匣结构可靠性分析

考虑涡轮后机匣输入参数对静强度以及静刚度的影响,选取该涡轮后机匣的7个关键参数作为输入随机变量,根据工程经验并结合金属材料手册,得到输入随机变量分布类型和分布参数,如表2所示。

表2 涡轮后机匣输入参数
Table 2 Input parameters of turbine rear casing

序号	参数名称	分布方式	均值	变异系数
1	外机匣半径 R_1 /mm	截断正态	700	0.02
2	内机匣半径 r_1 /mm	截断正态	400	0.02
3	外机匣长度 L_1 /mm	截断正态	190	0.02
4	内机匣长度 L_2 /mm	截断正态	190	0.02
5	发动机推力 F_T /kN	正态分布	120	0.05
6	弹性模量 E /MPa	正态分布	159 000	0.03
7	材料膨胀系数 $\alpha/(10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})$	正态分布	15.2	0.03

为了对该涡轮后机匣进行结构可靠性分析,应确定其失效模式。涡轮后机匣受到由于弯曲变形而产生的正应力,由于转子传力而产生的较大位移以及由于气体轴向力产生的轴向变形等多种失效模式的共同影响。为了研究涡轮后机匣在外

载荷下的工况,结合工程经验以及应力—强度干涉理论,选择Mises应力作用下的静强度失效以及最大等效位移作用下的静刚度失效作为主要研究对象。

根据《航空发动机设计手册》^[3]以及工程经验值确定涡轮后机匣两种典型失效准则。对于两种失效模式,失效判据如式(1)~式(2)所示。

$$\sigma_{\max} = \max \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots \} \geq \frac{\sigma_b}{n_{0.2}} \quad (1)$$

$$u_{\max} = \max \{ u_1, u_2, \dots, u_i, \dots \} \geq [u] \quad (2)$$

式中: σ_{\max} 为最大Mises应力; u_{\max} 为外机匣最大等效位移; i 为单元的编号, $i = 1, 2, \dots, n$; $n_{0.2}$ 为强度储备系数,根据设计经验,对于涡轮后机匣 $n_{0.2} = 1$ 。

设涡轮后机匣的极限状态函数为 $g_i(x)$, $g_i(x)$ 是表2中各基本输入变量 $X(R_1, R_2, \dots, \mu)$ 的隐式函数。对于涡轮后机匣,该极限状态函数为结构响应值与结构相应阈值的差。对于应力作用下的静强度失效,给定一个阈值 $[\sigma_{\max}]$,即可构建极限状态函数如式(3)所示。

$$g_1(\mathbf{X}) = [\sigma_{\max}] - \sigma(\mathbf{X}) \quad (3)$$

由式(3)可知,当 $g_1(\mathbf{X}) > 0$ 时,涡轮后机匣结构安全,否则结构失效。同理,对于最大等效位移引起的刚度失效,定义极限状态函数如式(4)所示。

$$g_2(\mathbf{X}) = [u_{\max}] - u(\mathbf{X}) \quad (4)$$

由式(4)可知,对于刚度失效极限状态函数,当 $g_2(\mathbf{X}) \geq 0$ 时,涡轮后机匣结构安全,否则结构失效。

对于本文研究的涡轮后机匣,其可靠性模型为串联系统,则涡轮后机匣的系统极限状态函数如式(5)所示,当 $g(\mathbf{X}) \leq 0$ 表示涡轮后机匣发生结构系统失效。

$$g(\mathbf{X}) = \min [g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X})] \quad (5)$$

1.3 试验设计

对于涡轮后机匣,其极限状态函数为隐式,很难直接获取其具体表达式。采用Kriging代理模型可以对复杂的隐式极限状态函数进行拟合以降低

计算量,并同时满足可靠性分析要求。本文选用拉丁质心多边形网格抽样(Latin Centered Voronoi Tessellation,简称LCVT)^[29]方法构建自适应Kriging代理模型的初始样本点。LCVT方法是由拉丁超立方抽样(Latin Hypercube Sampling,简称LHS)方法与Centered Voronoi Tessellation(CVT)方法结合形成一种新的采样方法,该方法基于多边形网格划分在空间上的等分性质,相较于LHS方法拥有更好的抽样均匀性,两种抽样方法的对比如图4所示。

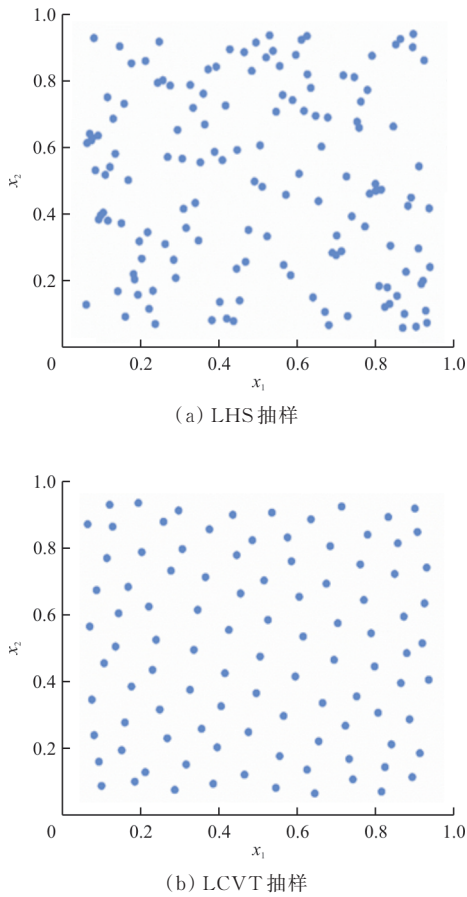


图4 两种抽样方法对比示意图

Fig. 4 Comparison of two sampling methods

本文利用IS方法求解涡轮后机匣失效概率。IS方法是一种改进的蒙特卡洛模拟方法,即在传统MCS方法的基础上引入重要抽样密度函数,使抽样中心移动至MPP点,使得抽样点落入对失效概率贡献较大的区域,从而提高失效概率的计算效率,并减小估计值的方差。引入重要抽样密度函数 $h_X(x)$ 后的失效概率表达式为

$$P_f = \int_{R^*} I_F(x) f_X(x) dx = \int_{R^*} I_F(x) \frac{f_X(x)}{h_X(x)} \cdot h_X(x) dx = E \left[I_F(x) \frac{f_X(x)}{h_X(x)} \right] \quad (6)$$

式中: $f_X(x)$ 为输入随机变量 $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_7\}^T$ 的联合概率密度函数。

根据 $h_X(x)$ 抽取输入随机变量 \mathbf{X} 的 N 个样本 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}^T$,可得失效概率的估计值为

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[I_F(x_j) \frac{f_X(x_j)}{h_X(x_j)} \right] \quad (7)$$

当抽样中心在MPP点时,重要抽样概率密度函数可以表示为

$$h_x^{\text{opt}}(x) = \frac{I_F(x) f_X(x)}{P_f} \quad (8)$$

利用IS方法求解失效概率的步骤为:

步骤一:利用改进的一次二阶矩方法(AFOSM)计算极限状态函数的MPP点 x^* 。

步骤二:以 x^* 为中心构造重要抽样密度函数 $h_X(x)$,并产生输入随机变量样本 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}^T$ 。

步骤三:将输入随机变量样本 x_j 代入极限状态函数,并求解指示函数在该样本点处的值 $I_F(x_j)$,并将 $f_X(x_j)/h_X(x_j)$ 与 $[f_X(x_j)/h_X(x_j)]^2$ 进行累加。

步骤四:由式(7)预测结构失效概率的估计值 \hat{P}_f 。

在利用IS方法求解涡轮后机匣失效概率时,极限状态函数为隐式形式,很难直接获取其具体表达式。自适应Kriging代理模型可以对形式复杂且隐式化的极限状态函数进行精确拟合,并降低计算量。本文采用AK-IS方法求解涡轮后机匣在两种失效模式下以及串联系统的失效概率。AK-IS方法求解结构失效概率流程如图5所示。需要指出的是:虽然自适应Kriging模型可以显著减少所需样本点数量,仍需一定数量的训练样本点来保证代理模型拟合精度。本文通过编写Python脚本文件^[30]实现对涡轮后机匣有限元模型的参数化建模以及对关键结果文件的自动提取,从而实现有限元分析输入—输出的完全参数化,实现高效的重复计算工作。

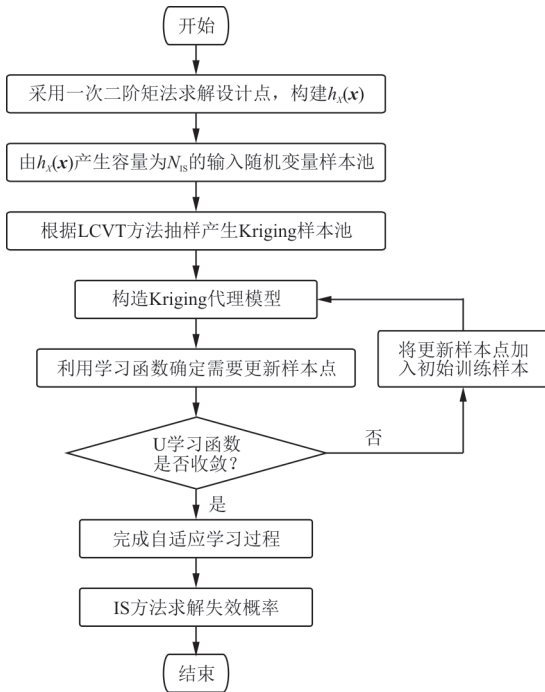


图5 AK-IS方法求解失效概率流程

Fig. 5 The flow of AK-IS to solve failure probability

2 基于失效概率的涡轮后机匣全局灵敏度分析

2.1 输入变量对失效概率的影响

涡轮后机匣在各失效模型下的可靠性模型 $Y = g(\mathbf{X})$, 其中 Y 为可靠性模型的响应值, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_7)$ 为涡轮后机匣输入随机变量, $g(\cdot)$ 为极限状态函数。

涡轮后机匣结构的无条件失效概率可以根据失效概率的定义, 通过对 $I_F(x)$ 进行数学期望运算来表示:

$$P_f = \int \cdots \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{R^s} I_F f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E[I_F] \quad (9)$$

当输入随机变量 X_i 的不确定性影响机匣结构失效概率时, 应考虑输入变量 X_i 不变时机匣结构的条件失效概率 $P_{f|X_i}$, 其表达式为

$$P_{f|X_i} = E(I_F | X_i) \quad (10)$$

进而输入随机变量 X_i 对涡轮后机匣结构失效概率的影响可由 P_f 与 $P_{f|X_i}$ 之间差值的绝对值来表示。

$$s(X_i) = |P_f - P_{f|X_i}| \quad (11)$$

Cui L J 等^[31]基于失效概率求解理论, 对矩独立全局灵敏度指标进行优化, 提出一种新的全局灵敏度指标, 即失效概率全局灵敏度指标, 其表达式为

$$\eta_i = \frac{1}{2} E_{X_i}(|P_f - P_{f|X_i}|) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_F f_Y(y) dy - \int_F f_{Y|X_i}(y) \right| f_{X_i}(x_i) dx_i = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |P_f - P_{f|X_i}| f_{X_i}(x_i) dx_i \quad (12)$$

式中: F 为涡轮后机匣结构系统的失效域, $F = \{\mathbf{X}: g(\mathbf{X}) \leq 0\}$; $f_Y(y)$ 为 Y 的无条件概率密度函数; $f_{Y|X_i}(y)$ 为条件概率密度函数。

对于式(12)中所得到的灵敏度指标, 可将其绝对值项进行平方处理, 处理后的失效概率全局灵敏度指标为

$$\delta_i^p = E_{X_i} \left\{ \left[E(I_F) - E(I_F | X_i) \right]^2 \right\} = V[E(I_F | X_i)] \quad (13)$$

Wei P 等^[32]将常数项 $V(I_F)$ 添加到 δ_i^p 中, 实现了涡轮后机匣失效概率灵敏度指标与方差全局灵敏度指标在形式上的统一, 统一后的指标为

$$S_i = \frac{V[E(I_F | X_i)]}{V(I_F)} \quad (14)$$

通过计算式(14)中的全局灵敏度指标, 可以明确涡轮后机匣各输出响应值不确定性的来源, 实现对机匣输入随机变量的重要性排序, 为优化结构模型提供支撑。

2.2 基于失效概率的全局灵敏度分析 IS-MC 方法

基于失效概率的全局灵敏度分析方法分类广泛, 其中基于贝叶斯公式以及马尔科夫链(Markov Chain, 简称 MC)的求解方法具有较高的求解效率以及精度。根据贝叶斯公式^[33], 条件失效概率可以表示为

$$P_{f|X_i} = \frac{P_f f_{X_i}(x_i | F)}{f_{X_i}(x_i)} \quad (15)$$

式中: $f_{X_i}(x_i | F)$ 为随机输入变量的条件概率密度函数, 失效概率全局灵敏度指标可以转化为

$$\begin{aligned}
 \delta_i^p &= \int_{x_i} (P_f - P_{f|x_i})^2 f_{x_i}(x_i) dx_i = \\
 &= \int_{x_i} \left[P_f - \frac{P_f f_{x_i}(x_i|F)}{f_{x_i}(x_i)} \right]^2 f_{x_i}(x_i) dx_i = \\
 &= P_f^2 \int_{x_i} \left[\frac{f_{x_i}(x_i) - f_{x_i}(x_i|F)}{f_{x_i}(x_i)} \right]^2 f_{x_i}(x_i) dx_i = \\
 &= P_f^2 \int_{x_i} \frac{[f_{x_i}(x_i) - f_{x_i}(x_i|F)]^2}{f_{x_i}(x_i)} dx_i
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

在使用贝叶斯方法求解灵敏度指标时,应采用失效样本估算输入随机变量的条件概率密度函数。在计算失效概率全局灵敏度指标时,若采用传统 MCS 方法求解通常会面临复杂积分问题,从而导致计算量过大。将式(16)中灵敏度指标 S_i 与合适的抽样方法相结合,可以提高全局灵敏度分析效率。本文采用 IS 抽样方法估计结构失效概率,并结合贝叶斯公式以及 MC 方法求解基于失效概率的涡轮后机匣全局灵敏度。IS 方法可以有效解决传统 MCS 方法中所需样本点多、计算效率低下的问题,在样本数量相同的前提下可以获得更多的失效样本,但是由于条件概率密度函数 $f_{x_i}(x_i|F) \neq h_{x_i}(x_i|F)$,故根据 IS 方法得到的失效样本无法直接估计 $f_{x_i}(x_i|F)$ 。利用 Markov 链产生条件样本可以实现对条件概率密度函数的估计。需要指出的是:由 Markov 链产生的条件样本是近似服从失效域中输入随机变量的条件概率密度函数的。将 IS 方法中 $h_{x_i}(x)$ 产生得到的样本 $\{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}, \dots, \mathbf{x}^{(N_{is})}\}$ 中的 M 个失效样本记为 $\{\mathbf{x}_F^{(1)}, \mathbf{x}_F^{(2)}, \mathbf{x}_F^{(3)}, \dots, \mathbf{x}_F^{(M)}\}$ 。设初始样本 $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{x}_F^{(1)}$, 则 $\mathbf{x}_F^{(j+1)}$ 与 $\mathbf{z}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, M - 1$) 之间的比值为

$$r(\mathbf{z}^{(j)}, \mathbf{x}_F^{(j+1)}) = \frac{f_{x_i}(\mathbf{x}_F^{(j+1)}) h_{x_i}(\mathbf{z}^{(j)})}{f_{x_i}(\mathbf{z}^{(j)}) h_{x_i}(\mathbf{x}_F^{(j+1)})} \tag{17}$$

接着根据 Metropolis-Hastings 算法,可以确定下一个样本为

$$\mathbf{z}^{(j+1)} = \begin{cases} \mathbf{x}_F^{(j+1)} & (\min(1, r) > \text{rand}[0, 1]) \\ \mathbf{z}^{(j)} & (\min(1, r) \leq \text{rand}[0, 1]) \end{cases} \tag{18}$$

根据式(17)以及式(18)可以求得满足服从 $f_{x_i}(x|F)$ 的样本点 $\{\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \mathbf{z}^{(3)}, \dots, \mathbf{z}^{(M)}\}$ ^[34]。利用服从条件概率分布的样本点 $\{\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \mathbf{z}^{(3)}, \dots, \mathbf{z}^{(M)}\}$ 通过直方图^[35]可实现对全部输入随机变量的失效

条件概率密度函数 $f_{x_i}(x_i)$ 的估计,将求得的 $f_{x_i}(x_i)$ 代入式(16)即可求得基于失效概率的全局灵敏度指标。该模拟过程无需额外的模型调用,其所需样本数远小于传统 MCS 方法,故 IS-MC 方法具有较高的计算效率,IS-MC 方法求解全局灵敏度的流程如图 6 所示。

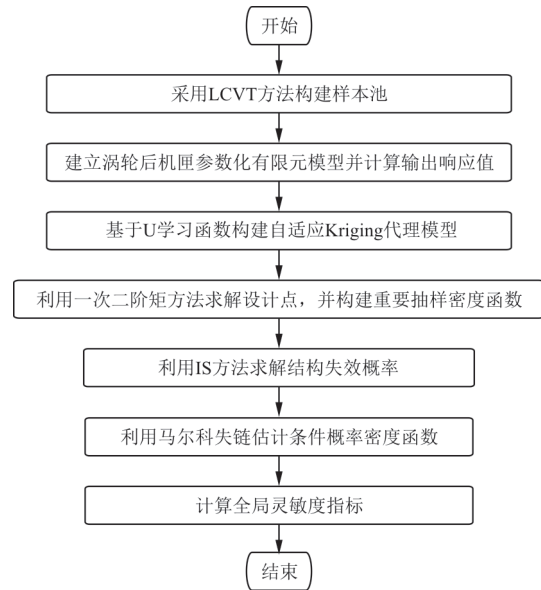


图 6 IS-MC 方法求解全局灵敏度流程图
Fig. 6 The flow of IS-MC to solve global sensitivity index

3 结果分析及讨论

以建立的涡轮后机匣为基础,结合失效概率与全局灵敏度求解方法分析表 2 中参数对涡轮后机匣结构失效概率的影响。

对于输入变量为 7 维的涡轮后机匣,首先采用 LCVT 方法在样本空间内生成一个样本容量为 10 000 的样本池,并在其中抽取 16 组数据作为初始训练样本,代入 Abaqus 中计算真实响应值,再根据 U 学习函数进行样本点的更新。更新阶段调用有限元模型 198 次,共计 214 个样本用于训练 Kriging 模型。根据 LCVT 方法抽取 20 组样本点对所构建的代理模型进行校验,经平均相对误差以及均方根误差校验,Kriging 模型精度符合要求。两种指标的校验结果如表 3 所示。

表 3 代理模型精度校核结果
Table 3 Accuracy check result of surrogate model

评估指标	平均相对误差/%	均方根误差
静强度失效	1.04	6.913
静刚度失效	5.45	0.012

利用所构建的自适应 Kriging 代理模型结合 IS 方法,求解两失效模式下涡轮后机匣结构失效概率。对于涡轮后机匣,其失效模式为串联,可将结构系统失效概率视为第三种失效模式加以求解。求得静强度失效模式下涡轮后机匣结构失效概率

为 3.10×10^{-4} ,静刚度失效模式下涡轮后机匣结构失效概率为 1.93×10^{-5} ,涡轮后机匣结构系统失效概率为 3.24×10^{-4} 。利用 AK-MCS 方法对 AK-IS 方法进行验证,得到两种方法的失效概率计算结果对比如表 4 所示。

表 4 机匣结构失效概率
Table 4 Structural failure probability of casing

方法	静强度失效	变异系数 (静强度)	静刚度失效	变异系数 (静刚度)	系统失效概率	变异系数 (系统失效)	计算时长/s	代理模型 调用次数
AK-IS	3.10×10^{-4}	0.014	1.93×10^{-5}	0.020	3.24×10^{-4}	0.032	2 356.3	10^4
AK-MCS	3.20×10^{-4}	0.016	2.00×10^{-5}	0.059	3.30×10^{-4}	0.017	7 342.7	10^7

从表 4 可以看出:AK-IS 方法相较于 AK-MCS 方法几乎未损失精度,且代理模型调用次数减小了 90%,计算时长减小了 67.9%,计算效率显著提高,说明 AK-IS 方法计算结构失效概率时更加高效与准确。

采用 IS-MC 方法分析涡轮后机匣的输入随机变量对不确定性机匣结构失效概率的影响,将 AK-IS 方法求解的无条件失效概率与贝叶斯公式结合 MC 方法求解的条件失效概率相结合,根据式 (16) 求出基于失效概率的涡轮后机匣全局灵敏度指标计算结果如表 5 所示,输入变量全局灵敏度指标如图 7~9 所示。

表 5 机匣全局灵敏度指标
Table 5 global sensitivity index of casing

失效模式	$R_1/$ 10^{-3}	$r_1/$ 10^{-3}	$L_1/$ 10^{-3}	$L_2/$ 10^{-3}	$E/$ 10^{-3}	$F_T/$ 10^{-3}	$\alpha/$ 10^{-3}
静强度失效	0.106	0.166	0.065	0.055	0.074	0.228	0.217
静刚度失效	0.055	0.099	0.017	0.030	0.027	0.136	0.128
系统失效	0.109	0.169	0.036	0.056	0.062	0.231	0.223

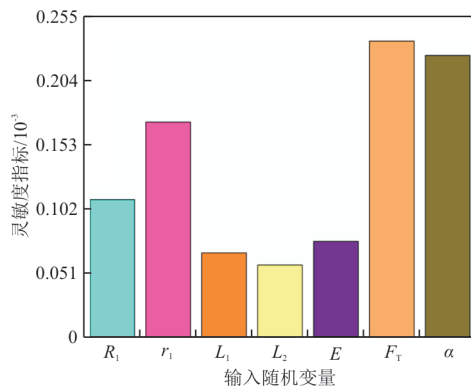


图 7 强度失效模式全局灵敏度指标

Fig. 7 Global sensitivity index of strength failure mode

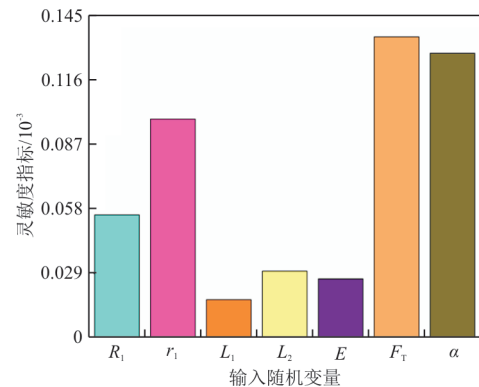


图 8 刚度失效模式全局灵敏度指标

Fig. 8 Global sensitivity index of stiffness failure mode

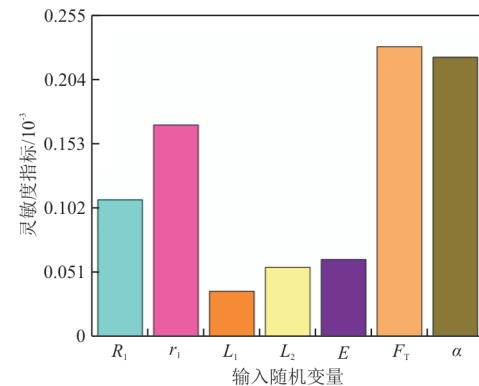


图 9 结构系统失效模式全局灵敏度指标

Fig. 9 Global sensitivity index of structural system failure mode

从图 7 可以看出:各输入随机变量重要性排序为 $F_T > \alpha > r_1 > R_1 > E > L_1 > L_2$,其中发动机最大推力 F_T 以及材料膨胀系数 α 的全局灵敏度指标最大,说明二者对失效模式中的失效概率影响最为显著,这是由于涡轮后机匣是主要承力结构,外载荷对结构强度的影响十分明显。与此同时,由于涡轮后机匣工作温度较高,温度场对结构强度

也有显著的影响。其他输入随机变量与上述两种变量的灵敏度指标有较大差距,说明对涡轮后机匣的静强度失效影响较小,对于 L_1 、 L_2 以及 E 三种输入变量,在涡轮后机匣强度设计中可忽略。

从图 8 可以看出:各输入随机变量重要性排序为 $F_T > \alpha > r_1 > R_1 > L_2 > E > L_1$ 。与图 7 相似,由于外载荷对刚度的显著影响以及涡轮后机匣的高温工况, F_T 与 α 的全局灵敏度指标最大,对失效概率的影响最显著。其他输入随机变量也与上述两种变量的灵敏度指标有较大差距,对涡轮后机匣的静刚度失效影响较小,进行刚度设计时可予以忽略。

从图 9 可以看出:各输入变量的重要性排序为 $F_T > \alpha > r_1 > R_1 > E > L_2 > L_1$ 。与前两种失效模式相似,对于涡轮后机匣结构系统, F_T 与 α 仍然为全局灵敏度指标最大的两种变量,对失效概率的影响最显著。其他输入随机变量对涡轮后机匣的系统失效影响较小。

为了验证全局灵敏度分析结果的重要性,可以通过控制变量法来考察输入随机变量参数变化时,对涡轮后机匣结构系统失效概率的影响。

输入随机变量变异系数改变对系统失效概率的影响情况如图 10 所示,可以看出:当控制其他输入随机变量变异系数不变时,单一改变一种输入随机变量时, F_T 对应失效概率的变化最明显,其次是 α 和 r_1 ,而 L_1 与 L_2 的影响最小,符合全局灵敏度分析结果。

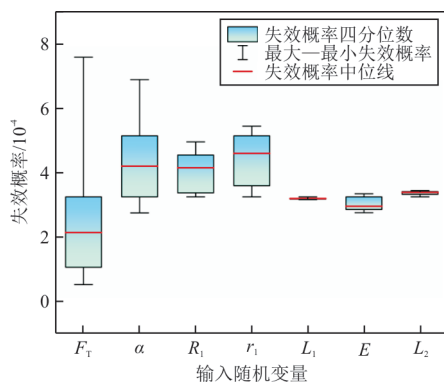


图 10 输入变量对系统失效概率影响箱型图

Fig. 10 Box diagram of influence of input variables on system failure probability

综合而言,对于涡轮后机匣结构系统,7种输入随机变量中,载荷参数对涡轮后机匣失效概率

的影响最大, F_T 有最大的全局灵敏度指标,这是由于涡轮后机匣是航空发动机主要承力部件。材料参数中膨胀系数 α 对系统失效概率的影响程度略小于 F_T ,这是由于涡轮后机匣的温度工况较为严苛,故而结构温度对系统失效概率也有较为显著的影响,而同为材料参数的弹性模量 E 对系统失效概率的影响则很小。对于涡轮后机匣几何参数,径向几何参数 r_1 以及 R_1 对失效概率的影响较为显著,而轴向几何参数 L_1 以及 L_2 对结构失效概率的影响很小;对于灵敏度指标较大的输入随机变量如 F_T 以及 α ,在涡轮后机匣结构优化设计时应对其进行重点考虑,对于灵敏度指标较小的输入随机变量,可适当忽略,从而实现涡轮后机匣结构参数的降维处理。

4 结 论

1) 自适应 Kriging 模型可以对涡轮后机匣极限状态函数进行拟合,在保证求解精度的同时极大地提高了求解效率。

2) 对于涡轮后机匣结构的特定失效模式,不同输入随机变量对失效概率的影响程度不尽相同。对于特定输入随机变量,在不同失效模式中灵敏度指标不尽相同。

3) 对于涡轮后机匣,在选取的 7 种关键参数中,发动机最大推力 F_T 以及材料膨胀系数 α 对机匣结构失效影响最大,在进行结构设计时应对其进行重点考虑;外机匣长度 L_1 以及内机匣长度 L_2 对结构失效影响较小,在设计时可适当忽略。

参 考 文 献

- [1] 梁小鸥, 臧朝平, 雷新亮, 等. 涡轮后机匣的结构动力学精确建模[J]. 航空发动机, 2022, 48(1): 47-53.
LIANG Xiaou, ZANG Chaoping, LEI Xinliang, et al. Accurate structural dynamic modeling of a rear spokes-frame casing of the turbine[J]. Aeroengine, 2022, 48(1): 47-53. (in Chinese)
- [2] 刘混举, 赵河明, 王春燕. 机械可靠性设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011.
LIU Hunju, ZHAO Heming, WANG Chunyan. Mechanical reliability design[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2011. (in Chinese)
- [3] 龚良慈, 李永新, 刘尔重, 等. 航空发动机设计手册[M]. 北京: 航空工业出版社, 2001.

- GONG Liangci, LI Yongxin, LIU Erchong, et al. Aero-engine design manual[M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2001. (in Chinese)
- [4] HASOFER A M, LIND N C. An exact and invariant first order reliability format[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1974, 100: 111-121.
- [5] BREITUNG K. Asymptotic approximation for multi-normal integrals[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1984, 110(3): 357-366.
- [6] 胡伟飞, 鄢继铨, 施钦杨, 等. 液体火箭发动机自适应克里金可靠性分析[J]. *航天控制*, 2022, 40(1): 50-56.
- HU Weifei, YAN Jiquan, SHI Qinyang, et al. Adaptive Kriging-based reliability analysis for liquid rocket engine[J]. *Aerospace Control*, 2022, 40(1): 50-56. (in Chinese)
- [7] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation[J]. *Structural Safety*, 2011, 33(2): 145-154.
- [8] YUN W, LU Z, JIANG X. An efficient reliability analysis method combining adaptive Kriging and modified importance sampling for small failure probability[J]. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2018, 58: 1383-1393.
- [9] WANG Z, SHAFIEEZHADEH A. REAK: reliability analysis through error rate-based adaptive Kriging[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2019, 182(2): 33-45.
- [10] 石岩, 陈晓岚, 刘炜, 等. 基于自适应代理模型的结构动力可靠度分析方法[J]. *航空工程进展*, 2020, 11(4): 498-507.
- SHI Yan, CHEN Xiaolan, LIU Wei, et al. Structure dynamic reliability analysis method based on adaptive surrogate model[J]. *Advances in Aeronautical Science and Engineering*, 2020, 11(4): 498-507. (in Chinese)
- [11] GLYNN P W, IGLEHART D L. Importance sampling for stochastic simulations[J]. *Management Science*, 1989, 35(11): 1367-1392.
- [12] 员婉莹, 吕震宙. 参数可靠性全局灵敏度高效分析的代理模型法[J/OL]. *航空学报*: 1-12 [2022-11-09]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1929.v.20220817.1430.014.html>.
- YUAN Wanying, LYU Zhenzhou. An efficient surrogate method for analyzing the parameter global reliability sensitivity[J/OL]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*: 1-12. [2022-11-09]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1929.v.20220817.1430.014.html>. (in Chinese)
- [13] ANDREA S, PAOLA A, BEATRICE D. How to avoid a perfunctory sensitivity analysis[J]. *Social and Behavioral Sciences*, 2010, 2(6): 7592-7594.
- [14] HELTON J C, OBERKAMPF W L. Alternative representations of epistemic uncertainty[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2004, 85(1/3): 1-10.
- [15] IMAN R L, HORA S C. A robust measure of uncertainty importance for use in fault tree system analysis[J]. *Risk Analysis*, 1990, 10(3): 401-406.
- [16] SALTELLI A. Sensitivity analysis for importance assessment[M]. US: Wiley, 2002.
- [17] BORGONOVO E. A new uncertainty importance measure[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2007, 92(6): 771-784.
- [18] BORGONOVO E, TARANTOLA S, PLISCHKE E, et al. Transformations and invariance in the sensitivity analysis of computer experiments[J]. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2014, 76(5): 925-947.
- [19] CUI L J, LU Z Z, ZHAO X P. Moment-independent importance measure of basic random variable and its probability density evolution solution[J]. *Science China Technological Sciences*, 2010, 53(4): 1138-1145.
- [20] WEI P, LU Z, HAO W, et al. Efficient sampling methods for global reliability sensitivity analysis[J]. *Computer Physics Communications*, 2012, 183(8): 1728-1743.
- [21] 张屹尚, 陈健. 航空发动机轮盘结构可靠性全局灵敏度分析[J]. *兵器装备工程学报*, 2021, 42(4): 244-249.
- ZHANG Yishang, CHEN Jian. Global sensitivity analysis for turbo-engine disk structures with uncertainties based on failure probability[J]. *Journal of Ordnance Equipment Engineering*, 2021, 42(4): 224-249. (in Chinese)
- [22] RATTO M, PAGANO A, YOUNG P C. Non-parametric estimation of conditional moments for sensitivity analysis[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2009, 94: 237-243.
- [23] 张航, 李洪双. 全局灵敏度分析的支持向量机方法[J]. *航空工程进展*, 2018, 9(2): 215-222.
- ZHANG Hang, LI Hongshuang. Global sensitivity analysis method based on support vector machine[J]. *Advances in Aeronautical Science and Engineering*, 2018, 9(2): 215-222. (in Chinese)
- [24] GUO Q, LIU Y S, ZHAO Y Z, et al. Improved resonance reliability and global sensitivity analysis of multi-span pipes conveying fluid based on active learning Kriging model[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2019, 170: 92-101.
- [25] ZHANG M W, LIU Y M, SUN C Z, et al. Measurements error propagation and its sensitivity analysis in the aero-engine multistage rotor assembling process[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2019, 90: 115003.
- [26] PRAGATHESWARAN T, RAJAKUMAR S, BALASUBRAMANIAN V, et al. Multicriteria optimization, sensitivity analysis, and prediction of bond characteristics of vacuum diffusion bonded aero engine Ti6Al4V alloy joints[J]. *SAE International Journal of Aerospace*, 2019, 12: 153-174.